[東京大学 2014 年前期 文科 $\boxed{1}$]

以下の問いに答えよ。

（1） t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

（2）（1）の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

（1） $f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$

$$=-2\{x^2-(4t-6)x\}+t^3-17t^2+39t-18$$

$$=-2\{x-(2t-3)\}^2+2(2t-3)^2+t^3-17t^2+39t-18$$

$$=-2\{x-(2t-3)\}^2+t^3-9t^2+15t$$

より，$f(x)$ は $x=2t-3$ のとき最小値 t^3-9t^2+15t をとる。

（2） $g(t)=t^3-9t^2+15t$ である。

$g'(t)=3t^2-18t+15=3(t^2-6t+5)=3(t-1)(t-5)$ であるから

$g(t)$ の増減は下表に従う。

t	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-9\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+15\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{-18-31\sqrt{2}}{4}$$

$g(5)=5^3-9\cdot5^2+15\cdot5=-25$

であり，これらの値の大きくない方が最小値である。

ここで，$\sqrt{2} < 2 \iff -31\sqrt{2} > -62$

$$\iff -18 - 31\sqrt{2} > -80$$

$$\iff \frac{-18 - 31\sqrt{2}}{4} > -20$$

であるから $g(t)$ の最小値は -25 である。

[東京大学 2014 年前期 文科 $\boxed{2}$]

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作（＊）を考える。

（＊）袋 U から球を 1 個取り出し，

（ｉ）取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

（ⅱ）取り出した球が赤球のときは, その球を袋 U へ戻すことなく, 袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っていたとする。この袋 U に対して操作（＊）を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

---

(1) p_1 ： $a+3$ 個の球から1個の赤球を取り出す確率なので $p_1 = \dfrac{1}{a+3}$

p_2 : 1 回目に赤球を取り出した場合, U の中に赤球がなく, 2 回目に赤球を取り出すことはない。

1 回目に白球を取り出した場合，その確率は $\dfrac{a+2}{a+3}$ で，2 回目に赤球を取り出すのは $a+1$ 個の球から1個の赤球を取り出すので，その確率は $\dfrac{1}{a+1}$ である。

したがって， $p_2 = \dfrac{a+2}{a+3} \cdot \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$

(2) n 回目に赤球を取り出していると, U の中に赤球がなく, $n+1$ 回目に赤球を取り出すことはない。

よって， $n+1$ 回目に取り出した球が赤球であるのは， n 回目に白球を取り出し，さらに $n+1$ 回目に赤球を取り出す場合である。

したがって，$p_{n+1}=\left(1-p_n\right)\times\dfrac{1}{a+1}$　（n≧1）…①が成り立つ。

①は　$p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$ と変形でき，

$$
\begin{aligned}
p_{n+1}-\frac{1}{a+2}&=-\frac{1}{a+1}\left(p_n-\frac{1}{a+2}\right)\\
&=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^2\left(p_{n-1}-\frac{1}{a+2}\right)\\
&=\cdots\\
&=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^n\left(p_1-\frac{1}{a+2}\right)\\
&=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^n\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)
\end{aligned}
$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{a+2}+\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+2}\right)$　（n≧1）

[東京大学 2014 年前期 文科 $\boxed{3}$]

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

（1）s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

（2）D を図示せよ。

（1）P の x 座標を p（$0 \leqq p \leqq 2$），Q の x 座標を q（$-3 \leqq q \leqq 0$）とおくと

$\mathrm{OP}=2p,\ \mathrm{OQ}=-2q$ である。

したがって $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6 \Leftrightarrow 2p-2q=6$

$$\Leftrightarrow q=p-3 \quad \cdots ①$$

$p,\ q$ について $0 \leqq p \leqq 2,\ -3 \leqq q \leqq 0$ …② であるが，

①かつ②より $p,\ q$ について $0 \leqq p \leqq 2,\ q=p-3$ …③ である。

直線 PQ の方程式は $y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}p-\left(-\sqrt{3}q\right)}{p-q}(x-p)$ で，

③より q を消去すると $y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}(x-p)$

$$\Leftrightarrow 3y-3\sqrt{3}p=\sqrt{3}(2p-3)(x-p)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(2p-3)x-3y-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0 \quad \cdots ④$$

④の通過する領域を D' とする。

「$-3 \leqq s \leqq 2$ のとき，点 $(s,\ t)$ が D' に含まれる」

⇔「$\sqrt{3}(2p-3)s-3t-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0$ かつ $0 \leqq p \leqq 2$ を満たす p が存在する」…（＊）

である。

$$\sqrt{3}(2p-3)s-3t-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}p^2-(2\sqrt{3}s+6)p+3t+3\sqrt{3}s=0$$

$$\Leftrightarrow 2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}t+3s=0 \quad \cdots ⑤$$

であり， $f(p)=2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}t+3s$ とおくと

$$f(p)=2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2-\frac{(s+3)^2}{2}+\sqrt{3}t+3s$$ となる。

$-3≦s≦2$ より $0≦\dfrac{s+3}{2}≦\dfrac{5}{2}$ である。

$y=f(p)$ のグラフの軸の位置により場合分けをする。

（ⅰ）$0≦\dfrac{s+3}{2}≦2$ すなわち $-3≦s≦1$ のとき

（＊）となる条件は，⑤の判別式を D として

「$\dfrac{D}{4}=(s+3)^2-2\left(\sqrt{3}t+3s\right)≧0$」かつ「$f(0)≧0$ または $f(2)≧0$」

であるから

「$t≦\dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$」かつ「$t≧-\sqrt{3}s$ または $t≧\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$」 …⑥

（ⅱ）$2<\dfrac{s+3}{2}≦\dfrac{5}{2}$ すなわち $1<s≦2$ のとき

（＊）となる条件は，

「$f(0)≧0$ かつ $f(2)≦0$」

であるから

「$t≧-\sqrt{3}s$ かつ $t≦\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$」 …⑦

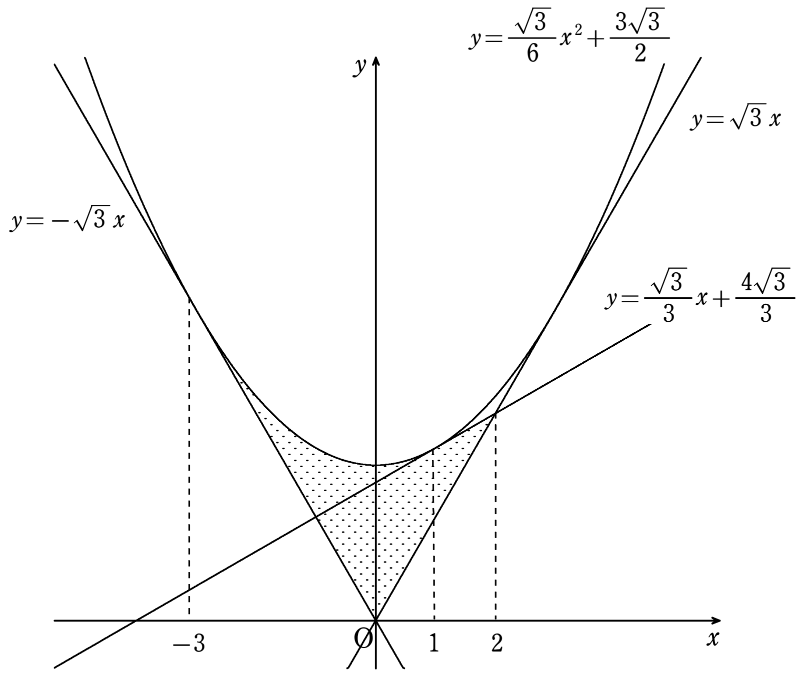
線分PQは $y=\sqrt{3}x$， $y=-\sqrt{3}x$ の上または上側にあるので $t≧\sqrt{3}s,\ t≧-\sqrt{3}s$ …⑧

したがって，「⑥または⑦」かつ⑧を満たす t を求めればよく，

$$\begin{cases} -\sqrt{3}s≦t≦\dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (-3≦s≦0) \\ \sqrt{3}s≦t≦\dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (0≦s≦1) \\ \sqrt{3}s≦t≦\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} & (1≦s≦2) \end{cases}$$

となる。

(2) (1)の結果を図示すると次の打点部分になる。ただし，境界上の点はすべて含む。



[東京大学 2014 年前期 文科 $\boxed{4}$]

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。

ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2,\ p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(1) a_n を p で割ったときの商を c_n とおくと

$$\begin{cases} a_{n+2} = pc_{n+2} + b_{n+2} \\ a_{n+1} = pc_{n+1} + b_{n+1} \\ a_n = pc_n + b_n \end{cases}$$ となる。

したがって $a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$

$$= \left(pc_{n+1} + b_{n+1}\right)\left(pc_n + b_n + 1\right)$$

$$= p^2 c_{n+1}c_n + pb_n c_{n+1} + pb_{n+1}c_n + b_{n+1}(b_n+1)$$

$$= p\left(pc_{n+1}c_n + b_n c_{n+1} + b_{n+1}c_n\right) + b_{n+1}(b_n+1) \quad \cdots①$$

a_{n+2} を p で割った余りが b_{n+2} であり，

①よりそれは $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

よって題意は示された。

(2) $r=2$ より $a_1 = 2$，$a_2 = 3$ である。

$p=17$ であるから $b_1 = 2,\ b_2 = 3$ であり，

$b_2\left(b_1+1\right)=3(2+1)=9$ より $b_3=9$

$b_3\left(b_2+1\right)=9(3+1)=36$ より $b_4=2$

$b_4\left(b_5+1\right)=2(9+1)=20$ より $b_5=3$

以下同様であり， $b_n=\begin{cases}2 & (n=1,\ 4,\ 7,\ 10) \\ 3 & (n=2,\ 5,\ 8) \\ 9 & (n=3,\ 6,\ 9)\end{cases}$

(3) (1)より b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致するので，

$b_{n+1}(b_n+1)=pd_n+b_{n+2}$ …②， $b_{m+1}(b_m+1)=pd_m+b_{m+2}$ …③ （$d_n,\ d_m$ は整数）

と表すことができる。

$b_{n+1}=b_{m+1},\ b_{n+2}=b_{m+2}$ であるから，②−③より $b_{n+1}(b_n-b_m)=p(d_n-d_m)$

ここで，右辺は素数 p の倍数であり， $0<b_{n+1}<p$， $-p<b_n-b_m<p$ であるから

$b_n-b_m=0$ でなければならない。

したがって $b_n=b_m$ が成り立つ。