[東京大学 2014 年前期 文科 $\boxed{4}$]

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。

ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2,\ p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

---

(1) a_n を p で割ったときの商を c_n とおくと

$$\begin{cases} a_{n+2}=pc_{n+2}+b_{n+2} \\ a_{n+1}=pc_{n+1}+b_{n+1} \\ a_n=pc_n+b_n \end{cases}$$ となる。

したがって $a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)$

$$=\left(pc_{n+1}+b_{n+1}\right)\left(pc_n+b_n+1\right)$$

$$=p^2c_{n+1}c_n+pb_nc_{n+1}+pb_{n+1}c_n+b_{n+1}(b_n+1)$$

$$=p\left(pc_{n+1}c_n+b_nc_{n+1}+b_{n+1}c_n\right)+b_{n+1}(b_n+1)\quad\cdots①$$

a_{n+2} を p で割った余りが b_{n+2} であり，

①よりそれは $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

よって題意は示された。

(2) $r=2$ より $a_1=2$，$a_2=3$ である。

$p=17$ であるから $b_1=2,\ b_2=3$ であり，

$b_2\left(b_1+1\right)=3(2+1)=9$ より $b_3=9$

$b_3\left(b_2+1\right)=9(3+1)=36$ より $b_4=2$

$b_4\left(b_5+1\right)=2(9+1)=20$ より $b_5=3$

以下同様であり, $b_n=\begin{cases}2 & (n=1,\ 4,\ 7,\ 10)\\ 3 & (n=2,\ 5,\ 8)\\ 9 & (n=3,\ 6,\ 9)\end{cases}$

(3) (1)より b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致するので,

$b_{n+1}(b_n+1)=pd_n+b_{n+2}$ …②, $b_{m+1}(b_m+1)=pd_m+b_{m+2}$ …③ （$d_n,\ d_m$ は整数）

と表すことができる。

$b_{n+1}=b_{m+1},\ b_{n+2}=b_{m+2}$ であるから, ②−③より $b_{n+1}(b_n-b_m)=p(d_n-d_m)$

ここで, 右辺は素数 p の倍数であり, $0<b_{n+1}<p$, $-p<b_n-b_m<p$ であるから

$b_n-b_m=0$ でなければならない。

したがって $b_n=b_m$ が成り立つ。