

[ 東京大学 2014 年前期 文科 2 ]



$a$  を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋  $U$  に対して、次の操作（\*）を考える。

（\*）袋  $U$  から球を 1 個取り出し、

（i）取り出した球が白球のときは、袋  $U$  の中身が白球  $a$  個、赤球 1 個となるようにする。

（ii）取り出した球が赤球のときは、その球を袋  $U$  へ戻すことなく、袋  $U$  の中身はそのままにする。

はじめに袋  $U$  の中に、白球が  $a+2$  個、赤球が 1 個入っていたとする。この袋  $U$  に対して操作（\*）を繰り返し行う。

たとえば、1 回目の操作で白球が出たとすると、袋  $U$  の中身は白球  $a$  個、赤球 1 個となり、さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると、袋  $U$  の中身は白球  $a$  個のみとなる。

$n$  回目に取り出した球が赤球である確率を  $p_n$  とする。ただし、袋  $U$  の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)  $p_1, p_2$  を求めよ。

(2)  $n \geq 3$  に対して  $p_n$  を求めよ。



(1)  $p_1$  :  $a+3$  個の球から 1 個の赤球を取り出す確率なので  $p_1 = \frac{1}{a+3}$

$p_2$  : 1 回目に赤球を取り出した場合、 $U$  の中に赤球がなく、2 回目に赤球を取り出すことはない。

1 回目に白球を取り出した場合、その確率は  $\frac{a+2}{a+3}$  で、2 回目に赤球を取り出すのは  $a+1$

個の球から 1 個の赤球を取り出すので、その確率は  $\frac{1}{a+1}$  である。

したがって、 $p_2 = \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+3)(a+1)}$

(2)  $n$  回目に赤球を取り出していると、 $U$  の中に赤球がなく、 $n+1$  回目に赤球を取り出すことはない。

よって、 $n+1$  回目に取り出した球が赤球であるのは、 $n$  回目に白球を取り出し、さらに  $n+1$  回目に赤球を取り出す場合である。

したがって、 $p_{n+1} = (1-p_n) \times \frac{1}{a+1}$  ( $n \geq 1$ ) …① が成り立つ。

①は  $p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left( p_n - \frac{1}{a+2} \right)$  と変形でき、

$$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left( p_n - \frac{1}{a+2} \right)$$

$$= \left( -\frac{1}{a+1} \right)^2 \left( p_{n-1} - \frac{1}{a+2} \right)$$

= …

$$= \left( -\frac{1}{a+1} \right)^n \left( p_1 - \frac{1}{a+2} \right)$$

$$= \left( -\frac{1}{a+1} \right)^n \left( \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+2} \right)$$

よって、 $p_n = \frac{1}{a+2} + \left( -\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} \left( \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+2} \right)$  ( $n \geq 1$ )