[東京大学 2014 年前期 文科 $\boxed{1}$]

以下の問いに答えよ。

(1) t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2) (1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

(1) $f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$

$$=-2\{x^2-(4t-6)x\}+t^3-17t^2+39t-18$$

$$=-2\{x-(2t-3)\}^2+2(2t-3)^2+t^3-17t^2+39t-18$$

$$=-2\{x-(2t-3)\}^2+t^3-9t^2+15t$$

より，$f(x)$ は $x=2t-3$ のとき最小値 t^3-9t^2+15t をとる。

(2) $g(t)=t^3-9t^2+15t$ である。

$g'(t)=3t^2-18t+15=3(t^2-6t+5)=3(t-1)(t-5)$ であるから

$g(t)$ の増減は下表に従う。

t	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		↗		↘		↗

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-9\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+15\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{-18-31\sqrt{2}}{4}$$

$$g(5)=5^3-9\cdot5^2+15\cdot5=-25$$

であり，これらの値の大きくない方が最小値である。

ここで， $\sqrt{2} < 2 \iff -31\sqrt{2} > -62$

$$\iff -18 - 31\sqrt{2} > -80$$

$$\iff \frac{-18 - 31\sqrt{2}}{4} > -20$$

であるから $g(t)$ の最小値は -25 である。