[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{1}$]

実数 a, b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0),\quad (x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

によって定める。このとき，次の条件(ｉ)，(ⅱ)がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

(ｉ) $\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

(ⅱ) $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5$ は相異なる。

条件より $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ と表せる。

$a=b=0$ のとき，$(x_6,\ y_6)=(0,\ 0)$ となるので不適。よって，$(a, b)\neq(0, 0)$

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta,\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$ （$0\leqq\theta<2\pi$）となる θ が存在し，

$\sqrt{a^2+b^2}=r$（>0）とおくと，$a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$ であり，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

となるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ を原点のまわりに θ 回転して r 倍したものである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_6}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ を 6θ 回転して r^6 倍したものである。

したがって，$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$ が成り立つとき，$6\theta=2k\pi$（k は整数），$r^6=1$ が成り立つ。

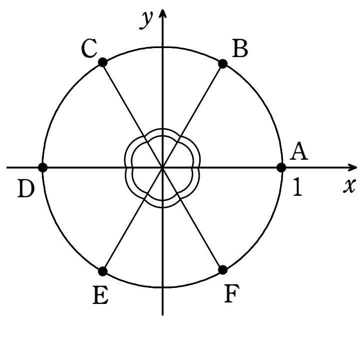
これから $r=1, \theta=\dfrac{k}{3}\pi$（$k=0, 1, \cdots, 5$） となる、

$\theta=0, \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$ のとき　$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}_0$ となり不適。

$\theta=\pi$ のとき　$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_0$ となり不適。

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\mathrm{P}_0, \cdots, \mathrm{P}_5$ は順に図の A, B, C, D, E, F となる。

$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき　$\mathrm{P}_0, \cdots, \mathrm{P}_5$ は順に図の A, F, E, D, C, B となる。



よって，$(a, b)=\left(\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{2}$]

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x),\ g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\ g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$ …①，$x>0$ を満たす実数 x が 3 個あるような a を求めればよい。

$x>0$ のとき ① ⇔ $a=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ である。

$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$（$x>0$）とおくと，

曲線 $y=h(x)$ と直線 $y=a$ が 3 個の共有点をもつような a を求めればよい。

$h'(x)=\dfrac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{-\cos x(x^2+2)}{x^3}$ より

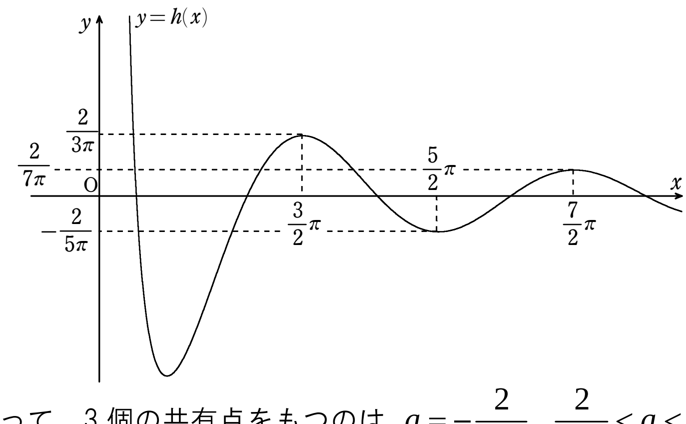
$h'(x)$ と $-\cos x$ は同符号で，k を非負整数として

$h(x)$ は $x=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき 極小値 $-\dfrac{2}{(4k+1)\pi}$ …②

$x=\left(2k+\dfrac{3}{2}\right)\pi$ のとき 極大値 $\dfrac{2}{(4k+3)\pi}$ …③

をとり，k について②は単調増加，③は単調減少である。

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=\infty$ であるから，$y=h(x)$ のグラフは図のようになる。



よって，3 個の共有点をもつのは $a=-\dfrac{2}{5\pi},\ \dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}$ のとき。

[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{3}$]

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

（ⅰ）A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

（ⅱ）B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして，A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表とでた場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので，B の勝利となる。

(1) A, B 合わせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

---

(1) ある回に A が投げ，その回も含めて，裏が偶数回（0 回も含む）連続して出ると，その次は A が投げ，裏が奇数回連続して出ると，その次は B が投げる。ある回に B が投げた時も同様。

よって，A の勝利となるのは，次の 3 つの場合がある。

（Ⅰ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underset{①}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅱ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underset{②}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{③}{\boxed{\text{B表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅲ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{④}{\boxed{\text{B表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{⑤}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅰ)のとき合計偶数回，

（Ⅱ)(Ⅲ)のとき合計奇数回である。

（ⅰ）n が偶数のとき

$n = 2k$ とおくと，（Ⅰ)の①は奇数回目であり，$1, 3, \cdots, 2k-1$ の k 通りある。

よって，$p(2k) = \dfrac{k}{2^{2k}}$ …⑥

（ⅱ）n が奇数のとき

$n=2k+1$ とおくと，

（Ⅱ）の②③はともに奇数回目で，1から $2k$ までに奇数は k 個あるから，

②③の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

（Ⅲ）の④⑤はともに偶数回目で，1から $2k$ までに偶数は k 個あるから

④⑤の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

よって $p(2k+1)=\dfrac{{}_k\mathrm{C}_2\times 2}{2^{2k+1}}=\dfrac{k(k-1)}{2^{2k+1}}$ …⑦

したがって，n が偶数のとき ⑥で $k=\dfrac{n}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$

n が奇数のとき ⑦で $k=\dfrac{n-1}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$

（$n=1$ でも成り立つ）

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}p(n)=S_m$ とおく。

（ⅰ）m が奇数のとき

$m=2j+1$ とおくと

$$S_{2j+1}=\sum_{k=1}^{j}\left\{p(2k)+p(2k+1)\right\}=\sum_{k=1}^{j}\left\{\frac{k}{2^{2k}}+\frac{k(k-1)}{2^{2k+1}}\right\}=\sum_{k=1}^{j}\frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$$ であるから

$$S_{2j+1}=\frac{1\cdot 2}{2^3}+\frac{2\cdot 3}{2^5}+\frac{3\cdot 4}{2^7}+\cdots+\frac{j(j+1)}{2^{2j+1}} \quad \cdots⑧$$

$$\frac{1}{4}S_{2j+1}=\frac{1\cdot 2}{2^5}+\frac{2\cdot 3}{2^7}+\cdots+\frac{(j-1)j}{2^{2j+1}}+\frac{j(j+1)}{2^{2j+3}} \quad \cdots⑨$$

⑧−⑨より $\dfrac{3}{4}S_{2j+1}=\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{4}{2^5}+\dfrac{6}{2^7}+\cdots+\dfrac{2j}{2^{2j+1}}-\dfrac{j(j+1)}{2^{2j+3}}$

$$S_{2j+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{j}{4^{j-1}}\right)-\frac{j(j+1)}{3\cdot 2^{2j+1}}$$

ここで，$T_j=1+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\cdots+\dfrac{j}{4^{j-1}}$ …⑩ とおくと

$$\frac{1}{4}T_j=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{j-1}{4^{j-1}}+\frac{j}{4^j} \quad \cdots⑪$$

⑩−⑪より $\dfrac{3}{4}T_j=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^{j-1}}-\dfrac{j}{4^j}$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{3}{4}T_j=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-0=\frac{4}{3}$$ より $$\lim_{j\to\infty}T_j=\frac{16}{9}$$

さらに，$\displaystyle\lim_{j\to\infty}\frac{j(j+1)}{3\cdot 2^{2j+1}}=0$ であることから $\displaystyle\lim_{j\to\infty}S_{2j+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{9}=\frac{16}{27}$

（ⅱ）m が偶数のとき

$m=2j$ とおくと

$S_{2j}=S_{2j+1}-p(2j+1)$ であり

$\displaystyle\lim_{j\to\infty}p(2j+1)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{j\to\infty}S_{2j}=\lim_{j\to\infty}S_{2j+1}$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}$

[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$\triangle$ABC において $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$$ を満たすとする。

(1) $\angle\mathrm{APB},\ \angle\mathrm{APC}$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

(1) $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ から $\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right|^2=\left|-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}\right|^2$

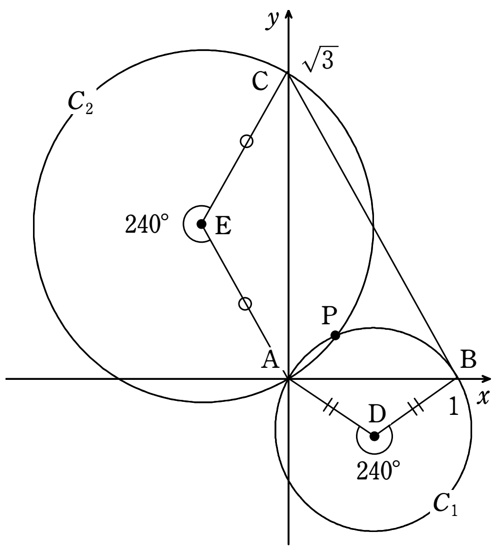
$\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}\right|^2=\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right|^2=\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}\right|^2=1$ であるから

$2+2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=1$ より $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=-\dfrac{1}{2}$

よって $\angle\mathrm{APB}=120^\circ$ …①

同様にして $\angle\mathrm{APC}=120^\circ$ …②

(2) 図のように座標設定する。



①より P は図の D を中心とする半径 DA の円 C_1 上にあり，

②より P は図の E を中心とする半径 EA の円 C_2 上にある。

$\triangle$ADB，$\triangle$AEC は頂角120°の二等辺三角形だから

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\right),\quad \mathrm{E}\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，C_1 は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\dfrac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ x^2-x+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y=0$ …③

C_2 は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1\ \Leftrightarrow\ x^2+x+y^2-\sqrt{3}y=0$ …④

③－④より　$-2x+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}y=0 \iff y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

④に代入して　$\dfrac{7}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x=0$　より　$x=0,\ \dfrac{2}{7}$

よって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$　である。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{3}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-5\\ \sqrt{3}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{2}{7}\begin{pmatrix}1\\ -3\sqrt{3}\end{pmatrix}$　となるので

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{\sqrt{7}}{7},\ |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2\sqrt{7}}{7},\ |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{5}$]

次の命題Pを証明したい。

命題P　次の条件(a), (b)をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1) y を自然数とする。このとき不等式 $x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2) 命題Pを証明せよ。

(1)

(ｉ) $x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ について

$x^3+3yx^2<(x+y)^3-(x+y) \iff 3y^2x+y^3-(x+y)>0$

$\iff (3y^2-1)x+y(y^2-1)>0$

$y \geqq 1$ であるから $x>0$ であれば常に成り立つ。

(ⅱ) $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$ について

$x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)>0$ …①

$D=(3y^2-1)^2+4(y^3-y)=9y^4+4y^3-6y^2-4y+1$ とおくと

①の解は $x<\dfrac{(3y^2-1)-\sqrt{D}}{2},\ \dfrac{(3y^2-1)+\sqrt{D}}{2}<x$

$x>0$ なので $x>\dfrac{(3y^2-1)+\sqrt{D}}{2}$

よって，(ｉ)かつ(ⅱ)を満たす $x\ (>0)$ は $x>\dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}$

(2) y を $3y=\underbrace{111\cdots\cdots1}_{99個}$ を満たす整数とする。

また，x を $x=10^n\ (n \geqq 99)$ とおくと，

$x^3=1\underbrace{000\cdots0}_{0が3n個},\ x^2=1\underbrace{000\cdots0}_{0が2n個},\ 3yx^2=\underbrace{111\cdots111}_{1が99個}\underbrace{000\cdots0}_{0が2n個}$

$$x^3+3yx^2=1\underbrace{000\cdots0}_{0\text{が}n-99\text{個}}\underbrace{111\cdots111}_{1\text{が}99\text{個}}\underbrace{000\cdots0}_{0\text{が}2n\text{個}} \quad \cdots②$$

$$x^3+(3y+1)x^2=1\underbrace{000\cdots0}_{0\text{が}n-99\text{個}}\underbrace{111\cdots111}_{1\text{が}98\text{個}}2\underbrace{000\cdots0}_{0\text{が}2n\text{個}} \quad \cdots③$$

x, y は(1)を満たす自然数であるから

$(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ は 3 つの連続する自然数の積で

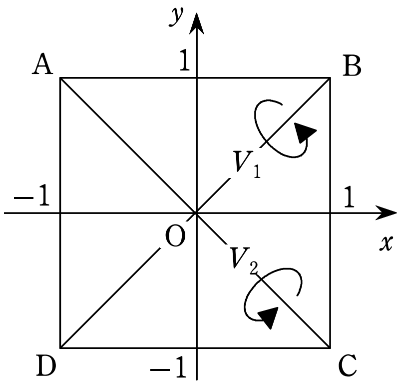
②と③の間にあり，$1\underbrace{000\cdots0}_{0\text{が}n-99\text{個}}\underbrace{111\cdots111}_{1\text{が}99\text{個}}\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{2n\text{個の数字}}$ の形になる。

[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ -1,\ 0),\ \mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

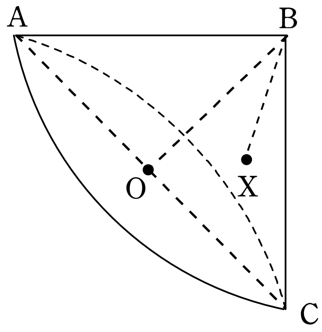


(1) xyz 空間の原点を O とし，V_1 の点を $\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$ とおく。

（ｉ）$x + y \geqq 0$ …① のとき

X の満たすべき条件は，$\angle\mathrm{XBO} \leqq \angle\mathrm{ABO} = \dfrac{\pi}{4}$

よって，$\cos\angle\mathrm{XBO} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BX}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



これと $\overrightarrow{\mathrm{BX}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BO}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\frac{-x-y+2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\sqrt{2}} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\iff -x-y+2 \geqq \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$

よって $-x-y+2 \geqq 0$ …② かつ $(-x-y+2)^2 \geqq (x-1)^2+(y-1)^2+z^2$ …③

③より $2xy-2x-2y+2-z^2 \geqq 0$ …④

①②④で $x = t$ として，切り口は $-t \leqq y \leqq 2-t$，$y \leqq 1 - \dfrac{z^2}{2(1-t)}$ …⑤

（ii）$x + y \leqq 0$ のとき

（ｉ)の $x,\ y$ をそれぞれ $-x,\ -y$ にすればよいから，

⑤の $t,\ y$ をそれぞれ $-t,\ -y$ にして，$t \leqq -y \leqq 2+t,\ -y \leqq 1 - \dfrac{z^2}{2(1-t)}$ より

$-2-t \leqq y \leqq -t,\ y \geqq \dfrac{z^2}{2(1-t)}-1$

以上と，$0 \leqq t < 1$ より $2-t > 1,\ -2-t < -1$ であることから

切り口は図の斜線部分。

$\alpha = \sqrt{2(1-t^2)}$ とおくと，面積は

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right)-\left(\frac{z^2}{2(1+t)}-1\right)\right\}dz = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\right\}(z+\alpha)(z-\alpha)\,dz$$

$$=\left\{\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\right\}\frac{\{\alpha-(-\alpha)\}^3}{6}$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1+t)}\cdot\frac{4}{3}\left\{\sqrt{2\left(1-t^2\right)}\right\}^3$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{2\left(1-t^2\right)}$$

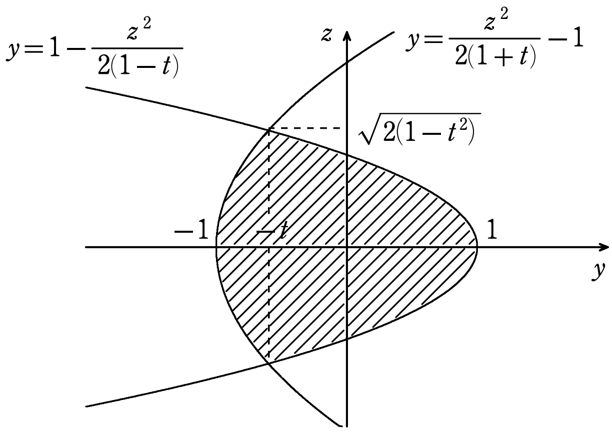
（2）正方形は x 軸に関して対称，BD と AC も x 軸に関して対称だから，

V_1 と V_2 は xz 平面に関して対称。

よって，V_2 を平面 $x=t$（$0 \leqq t < 1$）で切った切り口は，(1)と z 軸に関して対称である。

これと(1)の共通部分が V_1 と V_2 の共通部分 D を $x=t$ で切った切り口で，図の斜線部のようになる。

切り口の面積は



$$2\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1+t)}}\left\{1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right\}dz$$

$$=2\times\frac{1}{2(1-t)}\cdot\frac{1}{6}\left\{2\sqrt{2(1-t)}\right\}^3$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

また，D は $x=0$ に関して対称だから，

D の体積は $2\times\displaystyle\int_0^1\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}\,dt = \left[-\frac{32}{9}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{32\sqrt{2}}{9}$