[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{6}$]

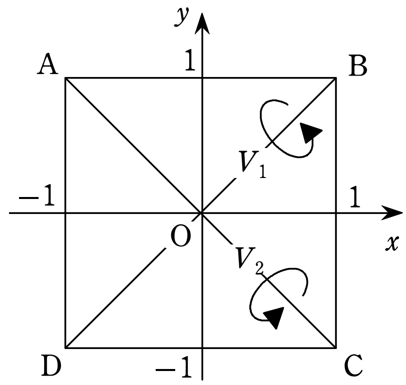
座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1,\ |y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

---

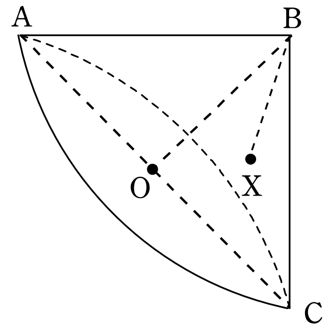
(1) xyz 空間の原点を O とし，V_1 の点を $\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$ とおく。



（ i ）$x+y\geqq 0$ …① のとき

X の満たすべき条件は，$\angle\mathrm{XBO}\leqq\angle\mathrm{ABO}=\dfrac{\pi}{4}$

よって，$\cos\angle\mathrm{XBO}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BX}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



これと $\overrightarrow{\mathrm{BX}}=\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BO}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ より

$$\frac{-x-y+2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\sqrt{2}}\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow\ -x-y+2\geqq\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$

よって $-x-y+2\geqq 0$ …② かつ $(-x-y+2)^2\geqq(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$ …③

③より $2xy-2x-2y+2-z^2\geqq 0$ …④

①②④で $x=t$ として，切り口は $-t\leqq y\leqq 2-t$，$y\leqq 1-\dfrac{z^2}{2(1-t)}$ …⑤

（ ii ）$x+y\leqq 0$ のとき

（ i ）の $x,\ y$ をそれぞれ $-x,\ -y$ にすればよいから，

⑤の $t,\ y$ をそれぞれ $-t,\ -y$ にして，$t\leqq -y\leqq 2+t,\ -y\leqq 1-\dfrac{z^2}{2(1-t)}$ より

$-2-t \leqq y \leqq -t,\ y \geqq \dfrac{z^2}{2(1-t)}-1$

以上と，$0 \leqq t < 1$ より $2-t>1, -2-t<-1$ であることから

切り口は図の斜線部分。

$\alpha=\sqrt{2(1-t^2)}$ とおくと，面積は

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right)-\left(\frac{z^2}{2(1+t)}-1\right)\right\}dz=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\right\}(z+\alpha)(z-\alpha)\,dz$$

$$=\left\{\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\right\}\frac{\{\alpha-(-\alpha)\}^3}{6}$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1+t)}\cdot\frac{4}{3}\left\{\sqrt{2\left(1-t^2\right)}\right\}^3$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{2\left(1-t^2\right)}$$

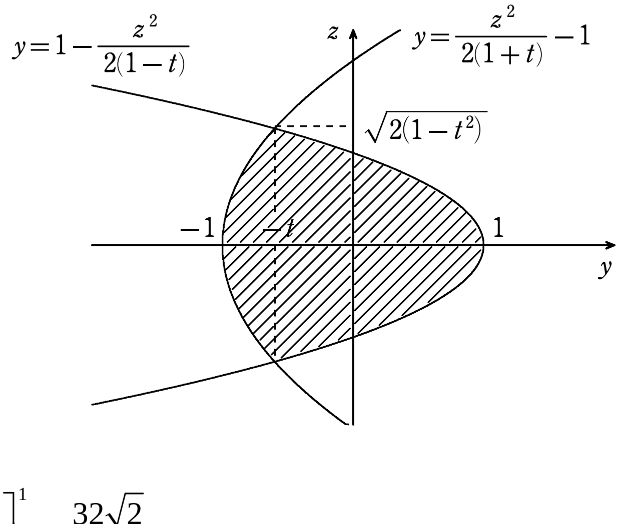
(2) 正方形は x 軸に関して対称，BD と AC も x 軸に関して対称だから，

V_1 と V_2 は xz 平面に関して対称。

よって，V_2 を平面 $x=t$ （$0 \leqq t < 1$）で切った切り口は，(1)と z 軸に関して対称である。

これと(1)の共通部分が V_1 と V_2 の共通部分 D を $x=t$ で切った切り口で，図の斜線部のようになる。

切り口の面積は



$$2\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1+t)}}\left\{1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right\}dz$$

$$=2\times\frac{1}{2(1-t)}\cdot\frac{1}{6}\left\{2\sqrt{2(1-t)}\right\}^3$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

また，D は $x=0$ に関して対称だから，

D の体積は $2\times\displaystyle\int_0^1\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}\,dt=\left[-\frac{32}{9}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{32\sqrt{2}}{9}$