

[ 東京大学 2013 年前期 理科 5 ]



次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数)  $A$  が存在する。

(a)  $A$  は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)  $A$  を 10 進法で表したとき, 1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)  $y$  を自然数とする。このとき不等式  $x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$  が成り立つような正の実数  $x$  の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。



(1)

(i)  $x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1)$  について

$$\begin{aligned} x^3 + 3yx^2 < (x + y)^3 - (x + y) &\Leftrightarrow 3y^2x + y^3 - (x + y) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3y^2 - 1)x + y(y^2 - 1) > 0 \end{aligned}$$

$y \geq 1$  であるから  $x > 0$  であれば常に成り立つ。

(ii)  $(x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$  について

$$x^2 - (3y^2 - 1)x - (y^3 - y) > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$D = (3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - y) = 9y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 4y + 1 \quad \text{とおくと}$$

$$\textcircled{1} \text{の解は } x < \frac{(3y^2 - 1) - \sqrt{D}}{2}, \frac{(3y^2 - 1) + \sqrt{D}}{2} < x$$

$$x > 0 \quad \text{なので } x > \frac{(3y^2 - 1) + \sqrt{D}}{2}$$

$$\text{よって, (i)かつ(ii)を満たす } x (> 0) \text{ は } x > \frac{3y^2 - 1 + \sqrt{9y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 4y + 1}}{2}$$

(2)  $y$  を  $3y = \underbrace{111 \cdots 1}_{99 \text{ 個}}$  を満たす整数とする。

また,  $x$  を  $x = 10^n$  ( $n \geq 99$ ) とおくと,

$$x^3 = \underbrace{1000 \cdots 0}_{0 \text{ が } 3n \text{ 個}}, \quad x^2 = \underbrace{1000 \cdots 0}_{0 \text{ が } 2n \text{ 個}}, \quad 3yx^2 = \underbrace{111 \cdots 111}_{1 \text{ が } 99 \text{ 個}} \underbrace{000 \cdots 0}_{0 \text{ が } 2n \text{ 個}}$$

$$x^3 + 3yx^2 = \underbrace{1000\dots0}_{0\text{が}n-99\text{個}} \underbrace{1111\dots1}_{1\text{が}99\text{個}} \underbrace{1000\dots0}_{0\text{が}2n\text{個}} \dots \textcircled{2}$$

$$x^3 + (3y+1)x^2 = \underbrace{1000\dots0}_{0\text{が}n-99\text{個}} \underbrace{1111\dots1}_{1\text{が}98\text{個}} \underbrace{1000\dots0}_{0\text{が}2n\text{個}} \dots \textcircled{3}$$

$x, y$ は(1)を満たす自然数であるから

$(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ は3つの連続する自然数の積で

②と③の間にあり、 $\underbrace{1000\dots0}_{0\text{が}n-99\text{個}} \underbrace{111\dots1}_{1\text{が}99\text{個}} \underbrace{\dots\dots\dots}_{2n\text{個の数字}}$ の形になる。