[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$\triangle$ABC において $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$$ を満たすとする。

(1) $\angle \mathrm{APB}$, $\angle \mathrm{APC}$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

---

(1) $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ から $\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right|^2=\left|-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}\right|^2$

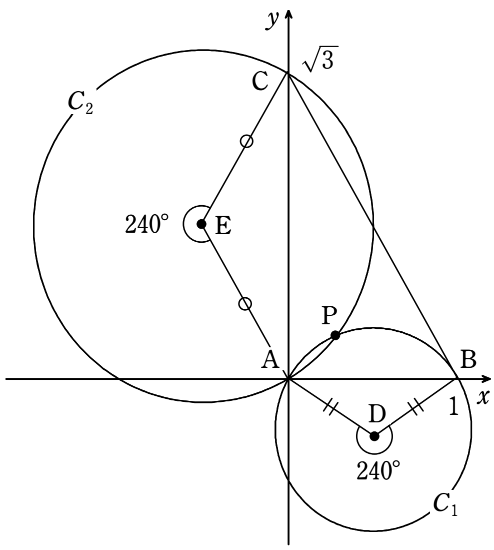
$\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}\right|^2=\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right|^2=\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}\right|^2=1$ であるから

$2+2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=1$ より $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=-\dfrac{1}{2}$

よって $\angle \mathrm{APB}=120^\circ$ …①

同様にして $\angle \mathrm{APC}=120^\circ$ …②

(2) 図のように座標設定する。



より P は図の D を中心とする半径 DA の円 C_1 上にあり，

②より P は図の E を中心とする半径 EA の円 C_2 上にある。

$\triangle$ADB，$\triangle$AEC は頂角120°の二等辺三角形だから

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\right),\quad \mathrm{E}\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，C_1 は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x^2-x+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y=0$ …③

C_2 は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow x^2+x+y^2-\sqrt{3}y=0$ …④

③－④より $-2x+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}y=0 \iff y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

④に代入して $\dfrac{7}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x=0$ より $x=0,\ \dfrac{2}{7}$

よって $\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{3}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-5\\ \sqrt{3}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{2}{7}\begin{pmatrix}1\\ -3\sqrt{3}\end{pmatrix}$ となるので

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{\sqrt{7}}{7},\ |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2\sqrt{7}}{7},\ |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$