[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{3}$]

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

（ｉ）A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

（ⅱ）B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして，A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表とでた場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので，B の勝利となる。

(1) A, B 合わせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

---

(1) ある回に A が投げ，その回も含めて，裏が偶数回（0 回も含む）連続して出ると，その次は A が投げ，裏が奇数回連続して出ると，その次は B が投げる。ある回に B が投げた時も同様。

よって，A の勝利となるのは，次の 3 つの場合がある。

（Ⅰ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underbrace{\boxed{\text{A表}}}_{①}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅱ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underbrace{\boxed{\text{A表}}}_{②}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underbrace{\boxed{\text{B表}}}_{③}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅲ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underbrace{\boxed{\text{B表}}}_{④}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underbrace{\boxed{\text{A表}}}_{⑤}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅰ)のとき合計偶数回，

（Ⅱ)(Ⅲ)のとき合計奇数回である。

（ｉ）n が偶数のとき

$n=2k$ とおくと，（Ⅰ)の①は奇数回目であり，$1, 3, \cdots, 2k-1$ の k 通りある。

よって， $p(2k)=\dfrac{k}{2^{2k}}$ $\cdots$⑥

（ⅱ）n が奇数のとき

$n=2k+1$ とおくと，

(Ⅱ)の②③はともに奇数回目で，1から $2k$ までに奇数は k 個あるから，

②③の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

(Ⅲ)の④⑤はともに偶数回目で，1から $2k$ までに偶数は k 個あるから

④⑤の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

よって $p(2k+1)=\dfrac{{}_k\mathrm{C}_2\times 2}{2^{2k+1}}=\dfrac{k(k-1)}{2^{2k+1}}$ …⑦

したがって，n が偶数のとき ⑥で $k=\dfrac{n}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$

n が奇数のとき ⑦で $k=\dfrac{n-1}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$

（$n=1$ でも成り立つ）

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}p(n)=S_m$ とおく。

（ⅰ）m が奇数のとき

$m=2j+1$ とおくと

$$S_{2j+1}=\sum_{k=1}^{j}\left\{p(2k)+p(2k+1)\right\}=\sum_{k=1}^{j}\left\{\frac{k}{2^{2k}}+\frac{k(k-1)}{2^{2k+1}}\right\}=\sum_{k=1}^{j}\frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$$ であるから

$$S_{2j+1}=\frac{1\cdot 2}{2^3}+\frac{2\cdot 3}{2^5}+\frac{3\cdot 4}{2^7}+\cdots+\frac{j(j+1)}{2^{2j+1}} \quad \cdots⑧$$

$$\frac{1}{4}S_{2j+1}=\frac{1\cdot 2}{2^5}+\frac{2\cdot 3}{2^7}+\cdots+\frac{(j-1)j}{2^{2j+1}}+\frac{j(j+1)}{2^{2j+3}} \quad \cdots⑨$$

⑧－⑨より $\dfrac{3}{4}S_{2j+1}=\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{4}{2^5}+\dfrac{6}{2^7}+\cdots+\dfrac{2j}{2^{2j+1}}-\dfrac{j(j+1)}{2^{2j+3}}$

$$S_{2j+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{j}{4^{j-1}}\right)-\frac{j(j+1)}{3\cdot 2^{2j+1}}$$

ここで，$T_j=1+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\cdots+\dfrac{j}{4^{j-1}}$ …⑩ とおくと

$$\frac{1}{4}T_j=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{j-1}{4^{j-1}}+\frac{j}{4^j} \quad \cdots⑪$$

⑩－⑪より $\dfrac{3}{4}T_j=1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^{j-1}}-\dfrac{j}{4^j}$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{3}{4}T_j=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-0=\frac{4}{3}$$ より $$\lim_{j\to\infty}T_j=\frac{16}{9}$$

さらに，$\displaystyle\lim_{j\to\infty}\frac{j(j+1)}{3\cdot 2^{2j+1}}=0$ であることから $\displaystyle\lim_{j\to\infty}S_{2j+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{9}=\frac{16}{27}$

（ⅱ）m が偶数のとき

$m=2j$ とおくと

$S_{2j}=S_{2j+1}-p(2j+1)$ であり

$\displaystyle\lim_{j\to\infty}p(2j+1)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{j\to\infty}S_{2j}=\lim_{j\to\infty}S_{2j+1}$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}$