[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{2}$]

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x),\ g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\ g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$ …①，$x>0$ を満たす実数 x が 3 個あるような a を求めればよい。

$x>0$ のとき ① ⇔ $a=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ である。

$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ （$x>0$）とおくと，

曲線 $y=h(x)$ と直線 $y=a$ が 3 個の共有点をもつような a を求めればよい。

$h'(x)=\dfrac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{-\cos x(x^2+2)}{x^3}$ より

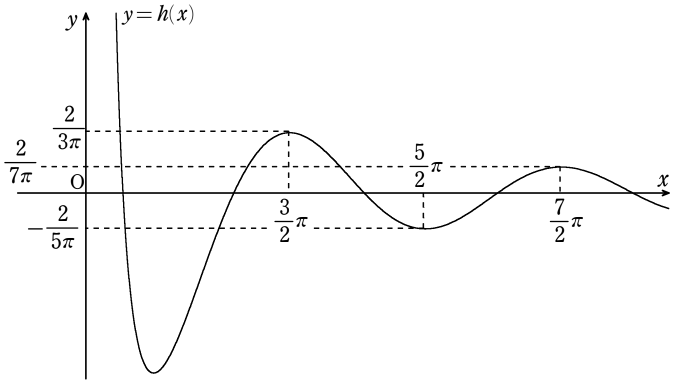
$h'(x)$ と $-\cos x$ は同符号で，k を非負整数として

$h(x)$ は $x=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ のとき 極小値 $-\dfrac{2}{(4k+1)\pi}$ …②

$x=\left(2k+\dfrac{3}{2}\right)\pi$ のとき 極大値 $\dfrac{2}{(4k+3)\pi}$ …③

をとり，k について②は単調増加，③は単調減少である。

また，$\lim\limits_{x\to+0}h(x)=\infty$ であるから，$y=h(x)$ のグラフは図のようになる。



よって，3 個の共有点をもつのは $a=-\dfrac{2}{5\pi},\ \dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}$ のとき。