[東京大学 2013 年前期 理科 $\boxed{1}$]

実数 a, b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0),\quad (x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

によって定める。このとき，次の条件(ｉ)，(ⅱ)がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

（ｉ）$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

（ⅱ）$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5$ は相異なる。

条件より $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ と表せる。

$a=b=0$ のとき，$(x_6,\ y_6)=(0,\ 0)$ となるので不適。よって，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta,\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$ （$0\leqq\theta<2\pi$）となる θ が存在し，

$\sqrt{a^2+b^2}=r$（>0）とおくと，$a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta$ であり，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

となるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ を原点のまわりに θ 回転して r 倍したものである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_6}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ を 6θ 回転して r^6 倍したものである。

したがって，$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$ が成り立つとき，$6\theta=2k\pi$（k は整数），$r^6=1$ が成り立つ。

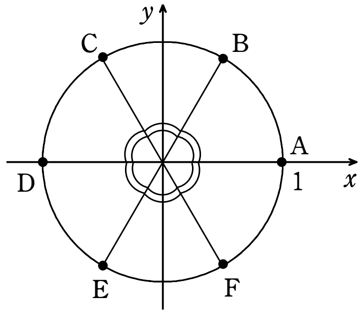
これから $r=1,\ \theta=\dfrac{k}{3}\pi$（$k=0, 1, \cdots, 5$） となる、

$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ のとき　$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}_0$ となり不適。

$\theta=\pi$ のとき　$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_0$ となり不適。

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\mathrm{P}_0, \cdots, \mathrm{P}_5$ は順に図の A, B, C, D, E, F となる。

$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき　$\mathrm{P}_0, \cdots, \mathrm{P}_5$ は順に図の A, F, E, D, C, B となる。



よって，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$