

[東京大学 2013 年前期 理科 1]



実数 a, b に対し平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$(x_0, y_0) = (1, 0), \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。このとき、次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

(i) $P_0 = P_6$

(ii) $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ は相異なる。



[東京大学 2013 年前期 理科 2]



a を実数とし, $x > 0$ で定義された関数 $f(x), g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}, g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。



[東京大学 2013 年前期 理科 3]



A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり, 最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i) A がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば A に 1 点を与え, コインは A がそのまま持つ。裏が出れば, 両者に点を与えず, A はコインを B に渡す。

(ii) B がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば B に 1 点を与え, コインは B がそのまま持つ。裏が出れば, 両者に点を与えず, B はコインを A に渡す。

そして, A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で, 2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば, コインが表, 裏, 表, 表とでた場合, この時点で A は 1 点, B は 2 点を獲得しているので, B の勝利となる。

(1) A, B 合わせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。



[東京大学 2013 年前期 理科 4]



$\triangle ABC$ において $\angle BAC = 90^\circ$, $|\overline{AB}| = 1$, $|\overline{AC}| = \sqrt{3}$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点 P が

$$\frac{\overline{PA}}{|\overline{PA}|} + \frac{\overline{PB}}{|\overline{PB}|} + \frac{\overline{PC}}{|\overline{PC}|} = \vec{0} \text{ を満たすとする。}$$

(1) $\angle APB$, $\angle APC$ を求めよ。

(2) $|\overline{PA}|$, $|\overline{PB}|$, $|\overline{PC}|$ を求めよ。



[東京大学 2013 年前期 理科 5]



次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する。

(a) A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b) A を 10 進法で表したとき, 1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1) y を自然数とする。このとき不等式 $x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。



[東京大学 2013 年前期 理科 6]



座標空間において、 xy 平面内で不等式 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を、直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1 、直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0 \leq t < 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

