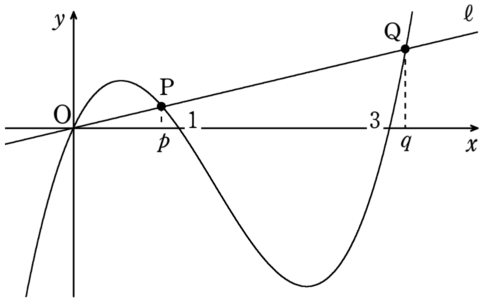
[東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{1}$]

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし，C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする。C と ℓ の共有点を O, P, Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合には，O, P, Q のうち 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を調べよ。



$y=x(x-1)(x-3)$ と $\ell: y=tx$ の共有点の x 座標は，

$x(x-1)(x-3)=tx \iff x(x^2-4x+3-t)=0$ から

O 以外の共有点をもつための条件は

$x^2-4x+3-t=0$ …① が 0 以外の実数解をもつことである。

①が $x=0$ を重解にもつことはないから，①が実数解をもてばよく，

t の範囲は $\dfrac{D}{4}=4-(3-t)\geqq 0$ より，$t\geqq -1$

①の解を p, q とおくと，$\mathrm{P}(p, tp), \mathrm{Q}(q, tq)$ であるから

$$g(t)=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$$

$$=|p|\sqrt{1+t^2}\cdot|q|\sqrt{1+t^2}$$

$$=|pq|(1+t^2)$$

$$=|3-t|(1+t^2)$$

ここで，$h(t)=(3-t)(1+t^2)=-t^3+3t^2-t+3$ とおく。

$-1\leqq t\leqq 3$ のとき $g(t)=h(t)$

$t\geqq 3$ のとき $g(t)=-h(t)$

また，$h'(t)=-(3t^2-6t+1)$

$h'(t)=0$ の解を $\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}=\alpha,\ \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}=\beta$ とおくと，

$-1<\alpha<\beta<3$ だから

$h(t)$ の増減および，$g(t)$ の増減は次の表に従う。

t	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

また，$h(t)=h'(t)\left(\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{4}{3}t+\dfrac{8}{3}$ であることと $h'(\alpha)=h'(\beta)=0$ より

$h\left(\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{36\pm4\sqrt{6}}{9}$ （複号同順）

よって，極大値は $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$，極小値は $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$，0

[東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{2}$]

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}\left(0,\ -\sqrt{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \sqrt{2}\right)$, $\mathrm{A}\left(a,\ \sqrt{a^2+1}\right)$（$0 \leqq a \leqq 1$）を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

---

(1) $\mathrm{PA}^2=a^2+\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2}\right)^2$

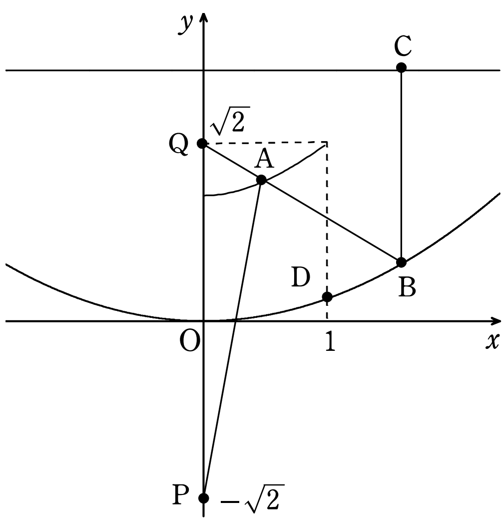
$$=2a^2+3+2\sqrt{2a^2+2}$$

$$=\left(\sqrt{2a^2+2}+1\right)^2$$

$\mathrm{AQ}^2=a^2+\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2}\right)^2$

$$=2a^2+3-2\sqrt{2a^2+2}$$

$$=\left(\sqrt{2a^2+2}-1\right)^2$$



であり，$\sqrt{2a^2+2}>1$ なので $\mathrm{PA}=\sqrt{2a^2+2}+1$， $\mathrm{AQ}=\sqrt{2a^2+2}-1$

よって $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}=2$ となる。

(2) (1)より $\mathrm{PA}=\mathrm{AQ}+2$ であり，

$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\mathrm{AQ}+2+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ …②

$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2\right)$ とおく。

（Q の y 座標）≧（A の y 座標）より $2>\sqrt{2}=$（Q の y 座標）≧（B の y 座標）であるから

$\mathrm{BC}=2-\dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2$ …③

また，(図のDの y 座標)<1 より，Aは放物線の上側にあるから

Aは線分QB上にあり，$\mathrm{AQ}+\mathrm{AB}=\mathrm{BQ}$

$\mathrm{BQ}^2=b^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}b^2-\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}b^2+\sqrt{2}\right)^2$ より $\mathrm{BQ}=\frac{\sqrt{2}}{8}b^2+\sqrt{2}$ …④

よって $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=$②$=$③$+$④$+2=4+\sqrt{2}$

[東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{3}$]

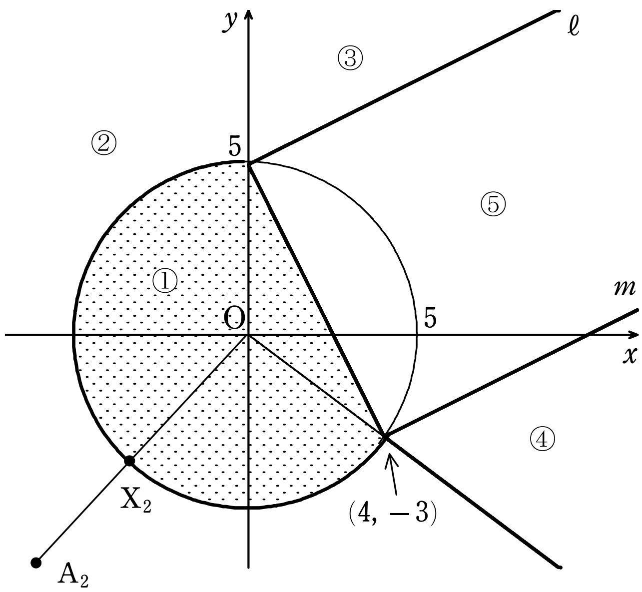
$a,\ b$ を実数の定数とする。実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 25,\ 2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき,

$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。

$x^2+y^2=25$，$2x+y=5$ より y を消去して

$x^2+(5-2x)^2=25 \iff x^2-4x=0$

よって，不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲 D は図の打点部（境界を含む）。



また，$z=x^2+y^2-2ax-2by=(x-a)^2+(y-b)^2-a^2-b^2$ である。

$\mathrm{A}(a,\ b)$ とし，D の点を $\mathrm{X}(x,\ y)$ とおくと，$z=\mathrm{AX}^2-a^2-b^2$ であるから

AX が最小のとき z も最小となる。

図で，ℓ ： $y=\dfrac{1}{2}x+5$，m ： $y=\dfrac{1}{2}x-5$ であり，領域によって場合分けをする。

① $a^2+b^2 \leqq 25$ かつ $2a+b \leqq 5$ のとき

A は D に含まれるので，z は $\mathrm{X}=\mathrm{A}$ のとき最小値 $-a^2-b^2$ をとる。

② $a^2+b^2 \geqq 25$ かつ「$a \leqq 0$ または $b \leqq -\dfrac{3}{4}a$」のとき

A が $\mathrm{A_2}$ にあるとすると，AX の最小値は $\mathrm{A_2X_2}=\sqrt{a^2+b^2}-5$ であるから

z の最小値は $\left(\sqrt{a^2+b^2}-5\right)^2-a^2-b^2=25-10\sqrt{a^2+b^2}$

③ $a \geqq 0$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

AX は X(0, 5) のとき最小になるから， z の最小値は $25-10b$

④ $-\frac{3}{4}a \leqq b \leqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

AX は X(4, −3) のとき最小になるから， z の最小値は $25-8a+6b$

⑤ $2a+b \geqq 5$ かつ $\frac{1}{2}a-5 \leqq b \leqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

AX の最小値は， A と直線 $2x+y=5$ の距離 $\frac{2a+b-5}{\sqrt{5}}$ である。

よって， z の最小値は $\left(\frac{2a+b-5}{\sqrt{5}}\right)^2-a^2-b^2=-\frac{1}{5}a^2-\frac{4}{5}b^2+\frac{4}{5}ab-4a-2b+5$

[東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{4}$]

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

（ⅰ）A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

（ⅱ）B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして，A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表とでた場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので，B の勝利となる。

A, B 合わせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

ある回に A が投げ，その回も含めて，裏が偶数回（0 回も含む）連続して出ると，その次は A が投げ，裏が奇数回連続して出ると，その次は B が投げる。ある回に B が投げた時も同様。

よって，A の勝利となるのは，次の 3 つの場合がある。

（Ⅰ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underset{①}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅱ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underset{②}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{③}{\boxed{\text{B表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅲ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{④}{\boxed{\text{B表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{⑤}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅰ)のとき合計偶数回，

（Ⅱ)(Ⅲ)のとき合計奇数回である。

（ⅰ）n が偶数のとき

$n=2k$ とおくと，（Ⅰ)の①は奇数回目であり，$1, 3, \cdots, 2k-1$ の k 通りある。

よって，$p(2k)=\dfrac{k}{2^{2k}}$ $\cdots$⑥

（ⅱ）n が奇数のとき

$n=2k+1$ とおくと，

(Ⅱ)の②③はともに奇数回目で，1から $2k$ までに奇数は k 個あるから，

②③の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

(Ⅲ)の④⑤はともに偶数回目で，1から $2k$ までに偶数は k 個あるから

④⑤の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

よって $p(2k+1)=\dfrac{{}_k\mathrm{C}_2\times 2}{2^{2k+1}}=\dfrac{k(k-1)}{2^{2k+1}}$ …⑦

したがって，n が偶数のとき ⑥で $k=\dfrac{n}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$

n が奇数のとき ⑦で $k=\dfrac{n-1}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$

（$n=1$ でも成り立つ）