[東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{4}$]

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

（ｉ）A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

（ⅱ）B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして，A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表とでた場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので，B の勝利となる。

A, B 合わせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

ある回に A が投げ，その回も含めて，裏が偶数回（0 回も含む）連続して出ると，その次は A が投げ，裏が奇数回連続して出ると，その次は B が投げる。ある回に B が投げた時も同様。

よって，A の勝利となるのは，次の 3 つの場合がある。

（Ⅰ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underset{①}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅱ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\underset{②}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{③}{\boxed{\text{B表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅲ）$\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{④}{\boxed{\text{B表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数}}\underset{⑤}{\boxed{\text{A表}}}\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{偶数}}\boxed{\text{A表}}$

（Ⅰ)のとき合計偶数回，

（Ⅱ)(Ⅲ)のとき合計奇数回である。

（ｉ）n が偶数のとき

$n=2k$ とおくと，（Ⅰ)の①は奇数回目であり，$1, 3, \cdots, 2k-1$ の k 通りある。

よって，$p(2k)=\dfrac{k}{2^{2k}}$ $\cdots$⑥

（ⅱ）n が奇数のとき

$n=2k+1$ とおくと，

(Ⅱ)の②③はともに奇数回目で，1から $2k$ までに奇数は k 個あるから，

②③の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

(Ⅲ)の④⑤はともに偶数回目で，1から $2k$ までに偶数は k 個あるから

④⑤の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通り。

よって $p(2k+1)=\dfrac{{}_k\mathrm{C}_2\times 2}{2^{2k+1}}=\dfrac{k(k-1)}{2^{2k+1}}$ …⑦

したがって，n が偶数のとき ⑥で $k=\dfrac{n}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$

n が奇数のとき ⑦で $k=\dfrac{n-1}{2}$ として $p(n)=\dfrac{1}{2^n}\cdot\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$

（$n=1$ でも成り立つ）