[ 東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{3}$ ]

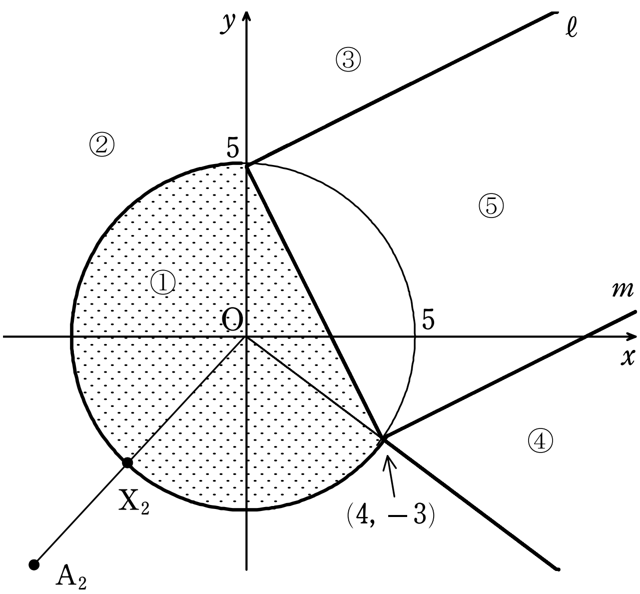
$a, b$ を実数の定数とする。実数 $x, y$ が $x^2+y^2 \leqq 25,\ 2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。

---

$x^2+y^2=25$，$2x+y=5$ より $y$ を消去して

$x^2+(5-2x)^2=25 \iff x^2-4x=0$

よって，不等式を満たす点 $(x, y)$ の存在範囲 $D$ は図の打点部（境界を含む）。




また，$z=x^2+y^2-2ax-2by=(x-a)^2+(y-b)^2-a^2-b^2$ である。

$\mathrm{A}(a, b)$ とし，$D$ の点を $\mathrm{X}(x, y)$ とおくと，$z=\mathrm{AX}^2-a^2-b^2$ であるから

AX が最小のとき $z$ も最小となる。

図で，$\ell$ ： $y=\dfrac{1}{2}x+5$，$m$ ： $y=\dfrac{1}{2}x-5$ であり，領域によって場合分けをする。

① $a^2+b^2 \leqq 25$ かつ $2a+b \leqq 5$ のとき

A は $D$ に含まれるので，$z$ は X＝A のとき最小値 $-a^2-b^2$ をとる。

② $a^2+b^2 \geqq 25$ かつ「$a \leqq 0$ または $b \leqq -\dfrac{3}{4}a$」のとき

A が $\mathrm{A}_2$ にあるとすると，AX の最小値は $\mathrm{A}_2\mathrm{X}_2=\sqrt{a^2+b^2}-5$ であるから

$z$ の最小値は $\left(\sqrt{a^2+b^2}-5\right)^2-a^2-b^2=25-10\sqrt{a^2+b^2}$

③ $a \geqq 0$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

AX は X(0, 5) のとき最小になるから， $z$ の最小値は $25-10b$

④ $-\frac{3}{4}a \leqq b \leqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

AX は X(4, −3) のとき最小になるから， $z$ の最小値は $25-8a+6b$

⑤ $2a+b \geqq 5$ かつ $\frac{1}{2}a-5 \leqq b \leqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

AX の最小値は， A と直線 $2x+y=5$ の距離 $\frac{2a+b-5}{\sqrt{5}}$ である。

よって， $z$ の最小値は $\left(\frac{2a+b-5}{\sqrt{5}}\right)^2 - a^2 - b^2 = -\frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}b^2 + \frac{4}{5}ab - 4a - 2b + 5$