[東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{2}$]

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}\left(0, -\sqrt{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(0, \sqrt{2}\right)$, $\mathrm{A}\left(a, \sqrt{a^2+1}\right)$ （$0 \leqq a \leqq 1$）を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

---

(1) $\mathrm{PA}^2=a^2+\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2}\right)^2$

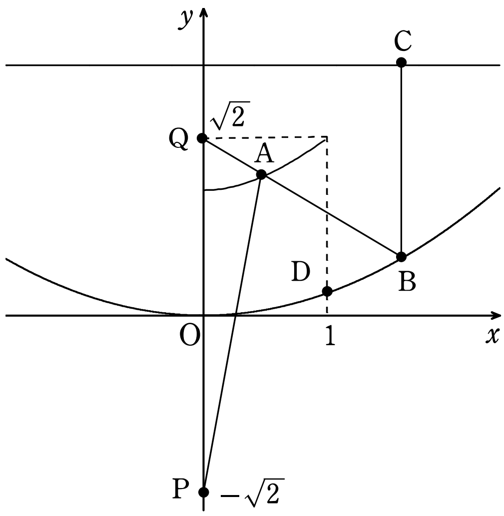
$=2a^2+3+2\sqrt{2a^2+2}$

$=\left(\sqrt{2a^2+2}+1\right)^2$

$\mathrm{AQ}^2=a^2+\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2}\right)^2$

$=2a^2+3-2\sqrt{2a^2+2}$

$=\left(\sqrt{2a^2+2}-1\right)^2$



であり，$\sqrt{2a^2+2}>1$ なので $\mathrm{PA}=\sqrt{2a^2+2}+1$， $\mathrm{AQ}=\sqrt{2a^2+2}-1$

よって $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}=2$ となる。

(2) (1)より $\mathrm{PA}=\mathrm{AQ}+2$ であり，

$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\mathrm{AQ}+2+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ …②

$\mathrm{B}\left(b, \dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2\right)$ とおく。

（Q の y 座標）≧（A の y 座標）より $2>\sqrt{2}=$（Q の y 座標）≧（B の y 座標）であるから

$\mathrm{BC}=2-\dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2$ …③

また，(図のDの y 座標)<1 より，Aは放物線の上側にあるから

Aは線分QB上にあり，$\mathrm{AQ}+\mathrm{AB}=\mathrm{BQ}$

$\mathrm{BQ}^2=b^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2-\sqrt{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2+\sqrt{2}\right)^2$ より $\mathrm{BQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2+\sqrt{2}$ …④

よって $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=$②$=$③$+$④$+2=4+\sqrt{2}$