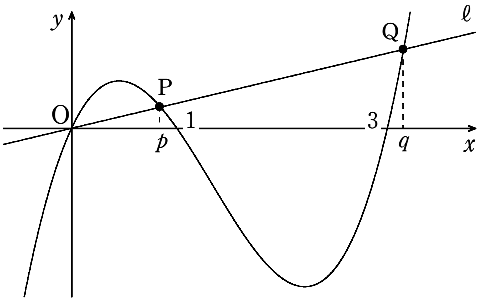
[東京大学 2013 年前期 文科 $\boxed{1}$]

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点Oを通る傾き t の直線を ℓ とし，C と ℓ がO以外に共有点をもつとする。C と ℓ の共有点をO, P, Qとし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の1つが接点である場合には，O, P, Qのうち2つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を調べよ。



$y=x(x-1)(x-3)$ と $\ell: y=tx$ の共有点の x 座標は，

$x(x-1)(x-3)=tx \iff x(x^2-4x+3-t)=0$ から

O以外の共有点をもつための条件は

$x^2-4x+3-t=0$ …① が0以外の実数解をもつことである。

①が $x=0$ を重解にもつことはないから，①が実数解をもてばよく，

t の範囲は $\dfrac{D}{4}=4-(3-t)\geqq 0$ より，$t\geqq -1$

①の解を p, q とおくと，$\mathrm{P}\left(p, tp\right), \mathrm{Q}\left(q, tq\right)$ であるから

$g(t)=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$

$=|p|\sqrt{1+t^2}\cdot|q|\sqrt{1+t^2}$

$=|pq|(1+t^2)$

$=|3-t|(1+t^2)$

ここで，$h(t)=(3-t)(1+t^2)=-t^3+3t^2-t+3$ とおく。

$-1\leqq t\leqq 3$ のとき $g(t)=h(t)$

$t\geqq 3$ のとき $g(t)=-h(t)$

また，$h'(t)=-(3t^2-6t+1)$

$h'(t)=0$ の解を $\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}=\alpha,\ \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}=\beta$ とおくと，

$-1<\alpha<\beta<3$ だから

$h(t)$ の増減および，$g(t)$ の増減は次の表に従う。

t	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$		↘		↗		↘

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	＼	$+$
$g(t)$		↘		↗		↘	0	↗

また，$h(t)=h'(t)\left(\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{4}{3}t+\dfrac{8}{3}$ であることと $h'(\alpha)=h'(\beta)=0$ より

$h\left(\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{36\pm4\sqrt{6}}{9}$ （複号同順）

よって，極大値は $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$，極小値は $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$，0