

[ 東京大学 2013 年前期 文科 1 ]



関数  $y = x(x-1)(x-3)$  のグラフを  $C$ ，原点  $O$  を通る傾き  $t$  の直線を  $l$  とし， $C$  と  $l$  が  $O$  以外に共有点をもつとする。 $C$  と  $l$  の共有点を  $O, P, Q$  とし， $|\overline{OP}|$  と  $|\overline{OQ}|$  の積を  $g(t)$  とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合には， $O, P, Q$  のうち 2 つが一致して，その接点であるとする。関数  $g(t)$  の増減を調べ，その極値を調べよ。



[ 東京大学 2013 年前期 文科 2 ]



座標平面上の 3 点  $P(0, -\sqrt{2})$ ,  $Q(0, \sqrt{2})$ ,  $A(a, \sqrt{a^2+1})$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差  $PA - AQ$  は  $a$  によらない定数であることを示し, その値を求めよ。

(2)  $Q$  を端点とし  $A$  を通る半直線と放物線  $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$  との交点を  $B$  とする。点  $B$  から直線  $y = 2$

へ下ろした垂線と直線  $y = 2$  との交点を  $C$  とする。このとき線分の長さの和  $PA + AB + BC$  は

$a$  によらない定数であることを示し, その値を求めよ。



[ 東京大学 2013 年前期 文科 3 ]



$a, b$  を実数の定数とする。実数  $x, y$  が  $x^2 + y^2 \leq 25, 2x + y \leq 5$  をともに満たすとき、  
 $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$  の最小値を求めよ。



[ 東京大学 2013 年前期 文科 4 ]



A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインが 1 枚あり, 最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i) A がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば A に 1 点を与え, コインは A がそのまま持つ。裏が出れば, 両者に点を与えず, A はコインを B に渡す。

(ii) B がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば B に 1 点を与え, コインは B がそのまま持つ。裏が出れば, 両者に点を与えず, B はコインを A に渡す。

そして, A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で, 2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば, コインが表, 裏, 表, 表とでた場合, この時点で A は 1 点, B は 2 点を獲得しているので, B の勝利となる。

A, B 合わせてちょうど  $n$  回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率  $p(n)$  を求めよ。

