[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{1}$]

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。 $x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\ x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

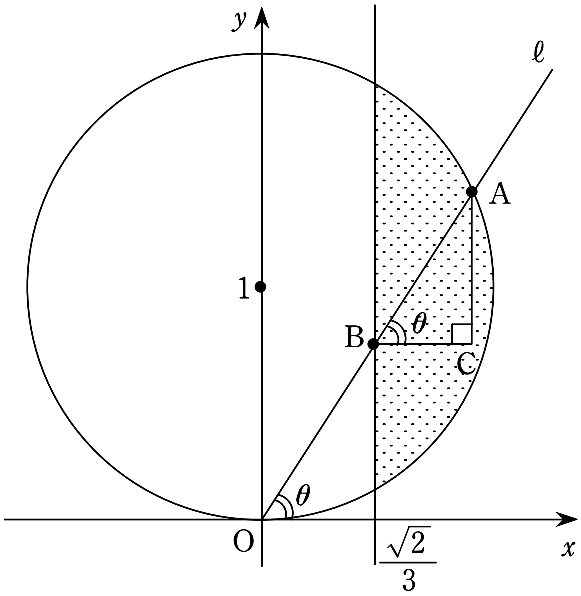
直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。

また， L が最大値をとるとき， x 軸と ℓ のなす角 $\theta \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

ℓ ： $y = x\tan\theta$ を $x^2+(y-1)^2=1$ に代入して

$x^2+\left(x\tan\theta-1\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(1+\tan^2\theta\right)x^2=2x\tan\theta$ より

図の A の x 座標は $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ である。



よって $L = \mathrm{AB}$

$$= \frac{\mathrm{BC}}{\cos\theta}$$

$$= \left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \left(2\cos\theta\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 2\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$$

$f(\theta)=2\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$ とおく。

θ の変域は $f(\theta)>0$ を満たす範囲 …① であるが，とりあえず $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として考える。

$$f'(\theta)=2\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{3\cos^2\theta}=\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cos^3\theta-\sin\theta}{3\cos^2\theta}$$

$h(\theta)=3\sqrt{2}\cos^3\theta-\sin\theta$ とおくと， $h(\theta)$ は減少で， $h(0)>0,\ h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ なので

$h(\alpha)=0$ となる α が存在する。

よって， $f(\theta)$ の増減は次表に従う。

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	$(+)$	＋	0	−	$(-)$
$f(\theta)$		↗		↘	

$h(\alpha)=0$ より $3\sqrt{2}\cos^3\alpha=\sin\alpha$

平方して $18\cos^6\alpha=\sin^2\alpha$

$=1-\cos^2\alpha$ より

$18\cos^6\alpha+\cos^2\alpha-1=0 \iff (3\cos^2\alpha-1)(6\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha+1)=0$

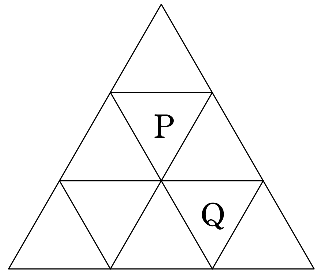
よって $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{3}$ から $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ を得る。

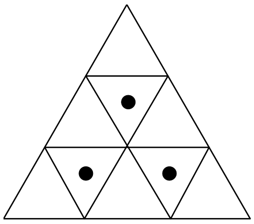
$f(\alpha)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}>0$ より α は真の定義域①に含まれる。

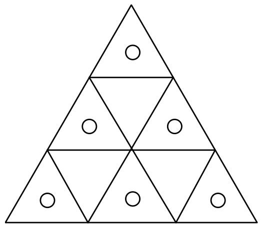
L の最大値は $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，このとき $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{2}$]

図のように, 正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り, 部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。







●にいるときは次に○に移動し，○にいるときは次に●に移動する。

最初は●にいるので，偶数秒後は●，奇数秒後は○にいる。

求める確率を q_n とする。

n が奇数のときは $q_n = 0$ である。

以下，n を偶数とする。

このとき，漸化式 $q_{n+2} = q_n \times \left(\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) + (1 - q_n) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6}$ が成り立つ。

これは $q_0 = 0$ とすると $n = 0$ でも成り立っている。

$$q_{n+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(q_n - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(q_{n-2} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(q_{n-4} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(q_{n-6} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(q_2 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} \left(q_0 - \frac{1}{3}\right)$$ となるから

$$q_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$$ である。

[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{3}$]

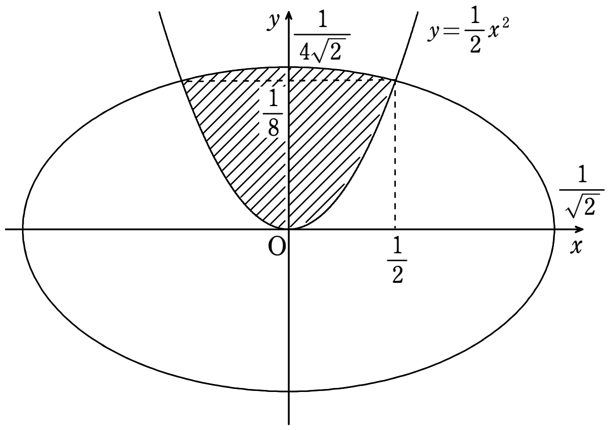
座標平面上で 2 つの不等式 $y \geqq \frac{1}{2}x^2$, $\frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$ によって定まる領域を S とする。

S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とおく。

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2) $\frac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ …①, $\frac{x^2}{4}+4y^2=\frac{1}{8}$ …② から x^2 を消去して



$$\frac{y}{2}+4y^2=\frac{1}{8} \Leftrightarrow 32y^2+4y-1=0$$

$$\Leftrightarrow (8y-1)(4y+1)=0$$

$y>0$ より $y=\frac{1}{8}$

よって S は図の斜線部分。

①のとき $y^2=\frac{x^4}{4}$,

②のとき $y^2=\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}$ であり，y 軸に関する対称性より

$$V_1=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}-\frac{x^4}{4}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x}{16}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^5}{10}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{192}-\frac{1}{320}\right)$$

$$=\frac{11}{480}\pi$$

①のとき $x^2=2y$，②のとき $x^2=\frac{1}{2}-16y^2$ であるから

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{8}}2y\,dy+\pi\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-16y^2\right)dy$$

$$=\pi\left(\left[y^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2}y-\frac{16}{3}y^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{1}{24\sqrt{2}}-\frac{1}{16}+\frac{1}{96}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{12\sqrt{2}}-\frac{7}{192}\right)\pi$$

（2）$\dfrac{V_2-V_1}{\pi}=\dfrac{1}{12\sqrt{2}}-\dfrac{57}{960}=\dfrac{40\sqrt{2}-57}{960}$ であり，

$\left(40\sqrt{2}\right)^2=3200$， $57^2=3249$ であるから $V_2<V_1$

したがって $\dfrac{V_2}{V_1}<1$

[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{4}$]

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。

以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(1) 連続する 2 個の自然数を $k,\ k+1$ とし，$k(k+1)$ が n 乗数であるとすると，

k と $k+1$ は互いに素，すなわち k の素因数と $k+1$ の素因数には共通なものがないから

k と $k+1$ はともに n 乗数でなければならない。

よって $k=a^n,\ k+1=(a+b)^n$ （$a,\ b$ は自然数）とおけて

$1=(k+1)-k=(a+b)^n-a^n=na^{n-1}b+\cdots \geqq 2$ となり矛盾。

したがって $k(k+1)$ は n 乗数でない。

(2) $n=2$ のとき，(1)より成り立つ。

$n \geqq 3$ のとき，連続する n 個の自然数を $k,\ k+1,\ \cdots,\ k+n-1$ として

$T=k(k+1)\cdots(k+n-1)$ …① とおくと

$k^n<T<(k+n-1)^n$ であるから，T が n 乗数であるとすると

T は $(k+1)^n,\ \cdots,\ (k+n-2)^n$ のいずれかである。

よって，$T=(k+j)^n$ …② （$1 \leqq j \leqq n-2$）とおける。

一方，①と $3 \leqq k+j+1 \leqq k+n-1$ より，T は $k+j+1$ の倍数であるが，

$k+j$ と $k+j+1$ は互いに素であるから，②は $k+j+1$ の倍数にならず矛盾。

したがって T は n 乗数でない。

[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{5}$]

★―――――――――――――――――――――――――――――――――★

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D)　A の成分 a, b, c, d は整数である。また，平面上の 4 点 $(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$ は

面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2) $c=0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，

それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると $|x|+|z|<|a|+|c|$ を満たすことを示せ。

★―――――――――――――――――――――――――――――――――★

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき　(D) $\Leftrightarrow$ $|ad-bc|=1$ …①

(1) $BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ において

$|(a+c)d-(b+d)c|=|ad-bc|=1$

$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$

$|(a-c)d-(b-d)c|=|ad-bc|=1$

であるから BA，$B^{-1}A$ は (D) を満たす。

(2) $c=0$ のとき，①より $|ad|=1$

よって $a=\pm1, d=\pm1$（複号任意）

(ⅰ) $a=\pm1, d=1$ のとき

$A=\begin{pmatrix} \pm1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$BA=\begin{pmatrix} \pm1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B^{-1}A=\begin{pmatrix} \pm1 & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

左から B をかけると，右上の成分が 1 増え，左から B^{-1} をかけると右上の成分が 1 減る。

よって，$b\geqq0$ のときは B^{-1} を b 回，$b\leqq0$ のときは B を $-b$ 回かけると $\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になる。

（ⅱ）$a=\pm 1,\ d=-1$のとき

$A=\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり，$BA=\begin{pmatrix} \pm 1 & b-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B^{-1}A=\begin{pmatrix} \pm 1 & b+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

左からBをかけると，右上の成分が 1 減り，左からB^{-1}をかけると右上の成分が 1 増える。

よって，$b \geqq 0$のときはBをb回，$b \leqq 0$のときはB^{-1}を$-b$回かけると $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ になる。

(3) $BA=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$|x|+|z|<|a|+|c| \ \Leftrightarrow\ |a+c|+|c|<|a|+|c| \ \Leftrightarrow\ |a+c|<|a|$ …②

$B^{-1}A=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$|x|+|z|<|a|+|c| \ \Leftrightarrow\ |a-c|+|c|<|a|+|c| \ \Leftrightarrow\ |a-c|<|a|$ …③

ここで，$|a-c| \geqq |a|$ かつ $|a-c| \geqq |a|$ とすると辺々かけて $|a+c||a-c| \geqq |a|^2$ …④

$|a| \geqq |c|$ より $a^2 \geqq c^2$ であり，$c \neq 0$より $|a+c||a-c|=|a^2-c^2| < a^2 = |a|^2$

これは④と矛盾する。よって，②または③が成り立つ。

[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{6}$]

2×2 行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{Tr}(P)=p+s$ と定める。$a,\ b,\ c$ は $a \geqq b>0,\ 0 \leqq c \leqq 1$ を満たす実数とする。行列 $A,\ B,\ C,\ D$ を次で定める。$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$

また実数 x に対し $U(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 各実数 t に対して，x の関数 $f(x)=\mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x) \right)$ の最大値 $m(t)$ を求めよ。（ただし，最大値をとる x を求める必要はない。）

(2) すべての実数 t に対し $2\mathrm{Tr}\left(U(t)CU(-t)D \right) \geqq \mathrm{Tr}\left(U(t)AU(-t)+B \right)$ が成り立つことを示せ。

---

(1) $U(t)AU(-t)=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a\cos t & -b\sin t \\ a\sin t & b\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\cos t\sin t \\ (a-b)\cos t\sin t & a\sin^2 t+b\cos^2 t \end{pmatrix} \quad \cdots①$$

$$U(t)AU(-t)-B=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\cos t\sin t \\ (a-b)\cos t\sin t & a\sin^2 t+b\cos^2 t \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

①で，$t=x,\ a=1,\ b=-1$ として

$$U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)=\begin{pmatrix} \cos^2 x-\sin^2 x & 2\cos x\sin x \\ 2\cos x\sin x & \sin^2 x-\cos^2 x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

よって

$$(U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

これを $(a-b)\cos t\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，

$p=s=\cos t\cos 2x+\sin t\sin 2x=\cos(2x-t)$ より $f(x)=2(a-b)\cos t\cos(2x-t)$

$a \geqq b$ より $\cos t \geqq 0$ のとき, $f(x)$ は $\cos(2x-t)=1$ となる x で最大値 $2(a-b)\cos t$,

$\cos t \leqq 0$ のとき, $f(x)$ は $\cos(2x-t)=-1$ となる x で最大値 $-2(a-b)\cos t$

をとるから $m(t)=2(a-b)|\cos t|$

(2) $U(t)CU(-t)$ は①の $a,\ b$ を $a^c,\ b^c$ に置き換えたものだから

$$U(t)CU(-t)D=\begin{pmatrix} a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\cos t\sin t \\ (a^c-b^c)\cos t\sin t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

よって

$$2\mathrm{Tr}\left(U(t)CU(-t)D \right)=2\left\{\left(a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t\right)b^{1-c}+\left(a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t\right)a^{1-c}\right\}$$

$$=2\left\{\cos^2 t\left(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c\right)+\sin^2 t\left(b+a\right)\right\} \quad \cdots②$$

①より $U(t)AU(-t)+B=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\cos t\sin t \\ (a-b)\cos t\sin t & a\sin^2 t+b\cos^2 t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}\left(U(t)AU(-t)+B \right)-m(t)=2(a+b)-2(a-b)|\cos t| \quad \cdots③$

よって,示すべき式は「② $\geqq$③」であり,

(②+③) $\div 2=\cos^2 t\left(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c\right)-(a+b)(1-\sin^2 t)+(a-b)|\cos t|$

$$=\cos^2 t\left\{a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-(a+b)\right\}+(a-b)|\cos t|$$

$$=|\cos t|\left[|\cos t|\left\{a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-(a+b)\right\}+a-b\right]$$ より

$|\cos t|\left\{a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-(a+b)\right\}+a-b \geqq 0 \quad \cdots④$ を示せばよい。

左辺は $|\cos t|$ の 1 次関数(または定数)だから,最小値は $|\cos t|=0$ のときの $a-b \quad \cdots⑤$

または $|\cos t|=1$ のときの $a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-2b \quad \cdots⑥$

$a \geqq b>0$ より,⑤ $\geqq 0$,⑥ $\geqq b^cb^{1-c}+b^{1-c}b^c-2b=0$

であるから,いずれにしても④は成り立ち,題意は示された。