[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{6}$]

2×2 行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{Tr}(P)=p+s$ と定める。$a,\ b,\ c$ は $a \geqq b>0,\ 0 \leqq c \leqq 1$ を満たす実数とする。行列 $A,\ B,\ C,\ D$ を次で定める。$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$

また実数 x に対し $U(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 各実数 t に対して，x の関数 $f(x)=\mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x) \right)$ の最大値 $m(t)$ を求めよ。(ただし，最大値をとる x を求める必要はない。)

(2) すべての実数 t に対し $2\mathrm{Tr}\left(U(t)CU(-t)D \right) \geqq \mathrm{Tr}\left(U(t)AU(-t)+B \right)$ が成り立つことを示せ。

(1) $U(t)AU(-t)=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a\cos t & -b\sin t \\ a\sin t & b\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\cos t\sin t \\ (a-b)\cos t\sin t & a\sin^2 t+b\cos^2 t \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

$$U(t)AU(-t)-B=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\cos t\sin t \\ (a-b)\cos t\sin t & a\sin^2 t+b\cos^2 t \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

①で，$t=x,\ a=1,\ b=-1$ として

$$U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)=\begin{pmatrix} \cos^2 x-\sin^2 x & 2\cos x\sin x \\ 2\cos x\sin x & \sin^2 x-\cos^2 x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

よって

$$(U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

これを $(a-b)\cos t\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，

$p=s=\cos t\cos 2x+\sin t\sin 2x=\cos(2x-t)$ より $f(x)=2(a-b)\cos t\cos(2x-t)$

$a \geqq b$ より $\cos t \geqq 0$ のとき，$f(x)$ は $\cos(2x-t)=1$ となる x で最大値 $2(a-b)\cos t$，

$\cos t \leqq 0$ のとき，$f(x)$ は $\cos(2x-t)=-1$ となる x で最大値 $-2(a-b)\cos t$

をとるから $m(t)=2(a-b)|\cos t|$

(2) $U(t)CU(-t)$ は①の $a,\ b$ を $a^c,\ b^c$ に置き換えたものだから

$$U(t)CU(-t)D=\begin{pmatrix} a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\cos t\sin t \\ (a^c-b^c)\cos t\sin t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

よって

$$2\mathrm{Tr}\left(U(t)CU(-t)D\right)=2\left\{\left(a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t\right)b^{1-c}+\left(a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t\right)a^{1-c}\right\}$$

$$=2\left\{\cos^2 t\left(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c\right)+\sin^2 t\left(b+a\right)\right\}\ \cdots②$$

①より $U(t)AU(-t)+B=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\cos t\sin t \\ (a-b)\cos t\sin t & a\sin^2 t+b\cos^2 t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}\left(U(t)AU(-t)+B\right)-m(t)=2(a+b)-2(a-b)|\cos t|\ \cdots③$

よって，示すべき式は「② ≧③」であり，

(②+③) $\div 2=\cos^2 t\left(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c\right)-(a+b)(1-\sin^2 t)+(a-b)|\cos t|$

$$=\cos^2 t\left\{a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-(a+b)\right\}+(a-b)|\cos t|$$

$$=|\cos t|\left[|\cos t|\left\{a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-(a+b)\right\}+a-b\right]$$ より

$|\cos t|\left\{a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-(a+b)\right\}+a-b \geqq 0\ \cdots④$ を示せばよい。

左辺は $|\cos t|$ の 1 次関数（または定数）だから，最小値は $|\cos t|=0$ のときの $a-b\ \cdots⑤$

または $|\cos t|=1$ のときの $a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-2b\ \cdots⑥$

$a \geqq b>0$ より，⑤ $\geqq 0$，⑥ $\geqq b^cb^{1-c}+b^{1-c}b^c-2b=0$

であるから，いずれにしても④は成り立ち，題意は示された。