[東京大学 2012 年前期 理科 5]

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D)　A の成分 $a,\ b,\ c,\ d$ は整数である。また，平面上の 4 点 $(0,\ 0),\ (a,\ b),\ (a+c,\ b+d),\ (c,\ d)$ は面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2) $c=0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，

それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると $|x|+|z|<|a|+|c|$ を満たすことを示せ。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき　(D) $\Leftrightarrow$ $|ad-bc|=1$ …①

(1) $BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ において

$|(a+c)d-(b+d)c|=|ad-bc|=1$

$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$

$|(a-c)d-(b-d)c|=|ad-bc|=1$

であるから BA，$B^{-1}A$ は (D) を満たす。

(2) $c=0$ のとき，①より $|ad|=1$

よって $a=\pm1,\ d=\pm1$（複号任意）

（ｉ）$a=\pm1,\ d=1$ のとき

$A=\begin{pmatrix} \pm1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$BA=\begin{pmatrix} \pm1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B^{-1}A=\begin{pmatrix} \pm1 & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

左から B をかけると，右上の成分が 1 増え，左から B^{-1} をかけると右上の成分が 1 減る。

よって，$b \geqq 0$ のときは B^{-1} を b 回，$b \leqq 0$ のときは B を $-b$ 回かけると $\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になる。

（ⅱ）$a=\pm 1,\ d=-1$ のとき

$A=\begin{pmatrix}\pm 1 & b \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ であり，$BA=\begin{pmatrix}\pm 1 & b-1 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$B^{-1}A=\begin{pmatrix}\pm 1 & b+1 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

左から B をかけると，右上の成分が 1 減り，左から B^{-1} をかけると右上の成分が 1 増える。

よって，$b \geqq 0$ のときは B を b 回，$b \leqq 0$ のときは B^{-1} を $-b$ 回かけると $\begin{pmatrix}\pm 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ になる。

(3) $BA=\begin{pmatrix}a+c & b+d \\ c & d\end{pmatrix}$ に対して

$|x|+|z|<|a|+|c| \Leftrightarrow |a+c|+|c|<|a|+|c| \Leftrightarrow |a+c|<|a|$ …②

$B^{-1}A=\begin{pmatrix}a-c & b-d \\ c & d\end{pmatrix}$ に対して

$|x|+|z|<|a|+|c| \Leftrightarrow |a-c|+|c|<|a|+|c| \Leftrightarrow |a-c|<|a|$ …③

ここで，$|a-c| \geqq |a|$ かつ $|a-c| \geqq |a|$ とすると辺々かけて $|a+c||a-c| \geqq |a|^2$ …④

$|a| \geqq |c|$ より $a^2 \geqq c^2$ であり，$c \neq 0$ より $|a+c||a-c|=|a^2-c^2| < a^2=|a|^2$

これは④と矛盾する。よって，②または③が成り立つ。