[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{4}$]

　n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。

以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

---

(1) 連続する 2 個の自然数を $k,\ k+1$ とし，$k(k+1)$ が n 乗数であるとすると，

k と $k+1$ は互いに素，すなわち k の素因数と $k+1$ の素因数には共通なものがないから

k と $k+1$ はともに n 乗数でなければならない。

よって $k=a^n,\ k+1=(a+b)^n$ （$a,\ b$ は自然数）とおけて

$1=(k+1)-k=(a+b)^n-a^n=na^{n-1}b+\cdots \geqq 2$ となり矛盾。

したがって $k(k+1)$ は n 乗数でない。

(2) $n=2$ のとき，(1)より成り立つ。

$n \geqq 3$ のとき，連続する n 個の自然数を $k,\ k+1,\ \cdots,\ k+n-1$ として

$T=k(k+1)\cdots(k+n-1)$ …① とおくと

$k^n<T<(k+n-1)^n$ であるから，T が n 乗数であるとすると

T は $(k+1)^n,\ \cdots,\ (k+n-2)^n$ のいずれかである。

よって，$T=(k+j)^n$ …② （$1 \leqq j \leqq n-2$）とおける。

一方，①と $3 \leqq k+j+1 \leqq k+n-1$ より，T は $k+j+1$ の倍数であるが，

$k+j$ と $k+j+1$ は互いに素であるから，②は $k+j+1$ の倍数にならず矛盾。

したがって T は n 乗数でない。