[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{3}$]

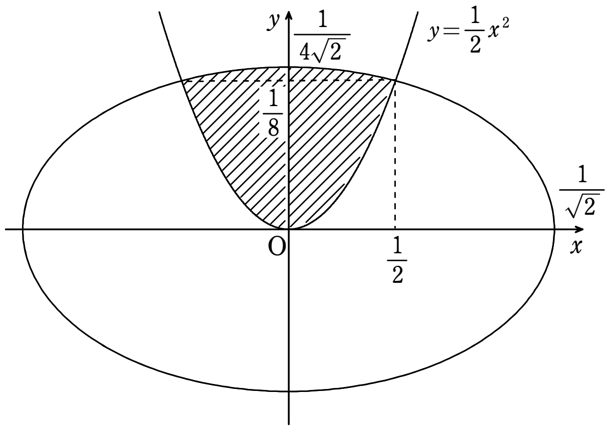
座標平面上で 2 つの不等式 $y \geqq \dfrac{1}{2}x^2,\ \dfrac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \dfrac{1}{8}$ によって定まる領域を S とする。

S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とおく。

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2 \quad \cdots①,\quad \dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8} \quad \cdots②$ から x^2 を消去して



$$\frac{y}{2}+4y^2=\frac{1}{8} \iff 32y^2+4y-1=0$$

$$\iff (8y-1)(4y+1)=0$$

$y>0$ より $y=\dfrac{1}{8}$

よって S は図の斜線部分。

①のとき $y^2=\dfrac{x^4}{4}$，

②のとき $y^2=\dfrac{1}{32}-\dfrac{x^2}{16}$ であり，y 軸に関する対称性より

$$V_1=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}-\frac{x^4}{4}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x}{16}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^5}{10}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{192}-\frac{1}{320}\right)$$

$$=\frac{11}{480}\pi$$

①のとき $x^2=2y$，②のとき $x^2=\dfrac{1}{2}-16y^2$ であるから

$$V_2 = \pi\int_0^{\frac{1}{8}} 2y\,dy + \pi\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2} - 16y^2\right)dy$$

$$= \pi\left(\left[y^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}y - \frac{16}{3}y^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{24\sqrt{2}} - \frac{1}{16} + \frac{1}{96}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{12\sqrt{2}} - \frac{7}{192}\right)\pi$$

（2） $\dfrac{V_2 - V_1}{\pi} = \dfrac{1}{12\sqrt{2}} - \dfrac{57}{960} = \dfrac{40\sqrt{2} - 57}{960}$ であり，

$\left(40\sqrt{2}\right)^2 = 3200$， $57^2 = 3249$ であるから $V_2 < V_1$

したがって $\dfrac{V_2}{V_1} < 1$