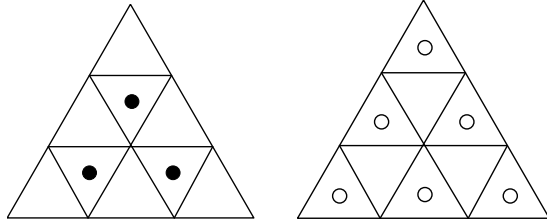
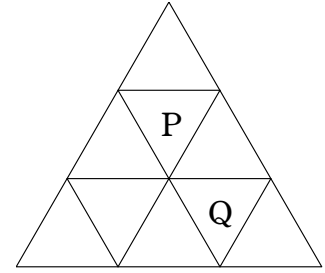


[東京大学 2012 年前期 理科 2]



図のように、正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り、部屋 P, Q を定める。

1 つの球が部屋 P を出発し、1 秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



●にいるときは次に○に移動し、○にいるときは次に●に移動する。

最初は●にいるので、偶数秒後は●、奇数秒後は○にいる。

求める確率を q_n とする。

n が奇数のときは $q_n = 0$ である。

以下、 n を偶数とする。

このとき、漸化式 $q_{n+2} = q_n \times \left(\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) + (1 - q_n) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6}$ が成り立つ。

これは $q_0 = 0$ とすると $n = 0$ でも成り立っている。

$$q_{n+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(q_n - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(q_{n-2} - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(q_{n-4} - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(q_{n-6} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \dots = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \left(q_2 - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}+1} \left(q_0 - \frac{1}{3} \right) \text{ となるから}$$

$$q_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \right\} \text{ である。}$$