[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{1}$]

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。$x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\ x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

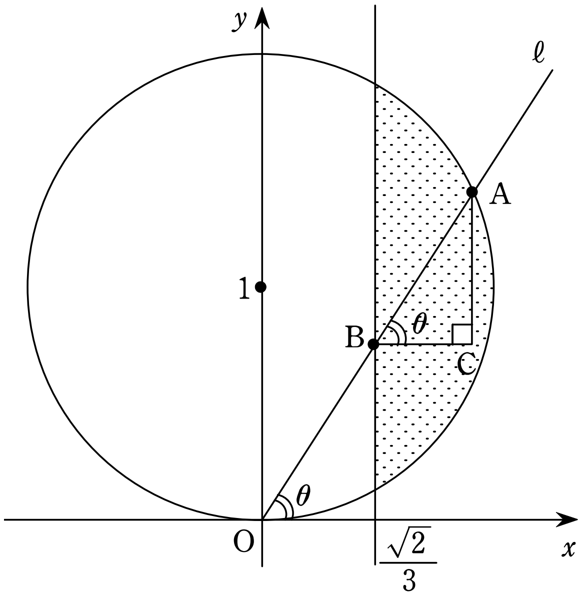
直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。

また，L が最大値をとるとき，x 軸と ℓ のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

ℓ ： $y = x\tan\theta$ を $x^2+(y-1)^2=1$ に代入して

$x^2+\left(x\tan\theta-1\right)^2=1 \iff \left(1+\tan^2\theta\right)x^2 = 2x\tan\theta$ より

図の A の x 座標は $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ である。



よって $L = \mathrm{AB}$

$$= \frac{\mathrm{BC}}{\cos\theta}$$

$$= \left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \left(2\cos\theta\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 2\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$$

$f(\theta) = 2\sin\theta - \dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$ とおく。

θ の変域は $f(\theta)>0$ を満たす範囲 …① であるが，とりあえず $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として考える。

$$f'(\theta) = 2\cos\theta - \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{3\cos^2\theta} = \sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cos^3\theta - \sin\theta}{3\cos^2\theta}$$

$h(\theta) = 3\sqrt{2}\cos^3\theta - \sin\theta$ とおくと，$h(\theta)$ は減少で，$h(0)>0,\ h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ なので

$h(\alpha)=0$ となる α が存在する。

よって，$f(\theta)$ の増減は次表に従う。

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	$(+)$	＋	0	－	$(-)$
$f(\theta)$		↗		↘	

$h(\alpha)=0$ より $3\sqrt{2}\cos^3\alpha=\sin\alpha$

平方して $18\cos^6\alpha=\sin^2\alpha$

$=1-\cos^2\alpha$ より

$18\cos^6\alpha+\cos^2\alpha-1=0 \Leftrightarrow (3\cos^2\alpha-1)(6\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha+1)=0$

よって $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{3}$ から $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ を得る。

$f(\alpha)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}>0$ より α は真の定義域①に含まれる。

L の最大値は $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，このとき $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$