[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{1}$]

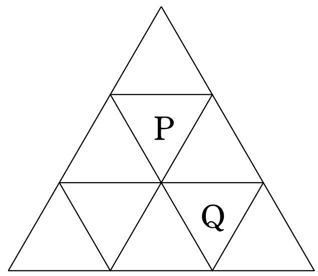
次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。 $x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\ x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。

また， L が最大値をとるとき， x 軸と ℓ のなす角 $\theta \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

[**東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{2}$**]

図のように, 正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り, 部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{3}$]

座標平面上で 2 つの不等式 $y \geqq \dfrac{1}{2}x^2,\ \dfrac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \dfrac{1}{8}$ によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とおく。

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{4}$]

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。

以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D) A の成分 $a,\ b,\ c,\ d$ は整数である。また，平面上の 4 点 $(0,\ 0),\ (a,\ b),\ (a+c,\ b+d),\ (c,\ d)$ は面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2) $c=0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると $|x|+|z|<|a|+|c|$ を満たすことを示せ。

[東京大学 2012 年前期 理科 $\boxed{6}$]

2×2 行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{Tr}(P)=p+s$ と定める。$a,\ b,\ c$ は $a\geqq b>0,\ 0\leqq c\leqq 1$ を満たす実数とする。行列 $A,\ B,\ C,\ D$ を次で定める。$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$

また実数 x に対し $U(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 各実数 t に対して，x の関数 $f(x)=\mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x) \right)$ の最大値 $m(t)$ を求めよ。（ただし，最大値をとる x を求める必要はない。）

(2) すべての実数 t に対し $2\mathrm{Tr}\left(U(t)CU(-t)D \right)\geqq \mathrm{Tr}\left(U(t)AU(-t)+B \right)$ が成り立つことを示せ。