[東京大学 2012 年前期 文科 $\boxed{1}$]

★ ★

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす。$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ。

★ ★

与式から $3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0$

これを満たす実数 y が存在するための条件は

$(4x+5)^2-12(2x^2+4x-4)\geqq 0 \iff 8x^2+8x-73\leqq 0$

$$\iff 2(2x)^2+4\cdot 2x-73\leqq 0$$

$$\frac{-2-5\sqrt{6}}{2}\leqq 2x\leqq \frac{-2+5\sqrt{6}}{2}$$

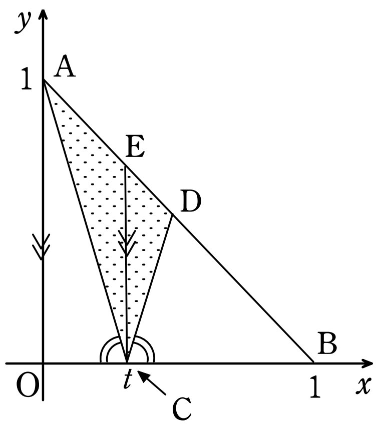
$$\frac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq \frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$$

よって，x の最大値は $\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

[東京大学 2012 年前期 文科 $\boxed{2}$]

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}(1, 0)$, $\mathrm{C}(t, 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。



AC の傾きは $-\dfrac{1}{t}$，CD の傾きは $\dfrac{1}{t}$

CD の式は $y=\dfrac{1}{t}(x-t)$

これと $y=1-x$ より

D の x 座標は $\dfrac{1}{t}(x-t)=1-x$ から $x=\dfrac{2t}{1+t}$

図のように E をとると，

$\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ACE}+\triangle\mathrm{DCE}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{CE}\cdot(\mathrm{D}\text{ の }x\text{ 座標})=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{2t}{1+t}=\dfrac{t(1-t)}{1+t}$

ここで，$1+t=u$ とおくと $1<u<2$ であり

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{(u-1)(2-u)}{u}=\frac{3u-u^2-2}{u}=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

相加平均・相乗平均の関係より $u+\dfrac{2}{u}\geqq 2\sqrt{u\cdot\dfrac{2}{u}}=2\sqrt{2}$

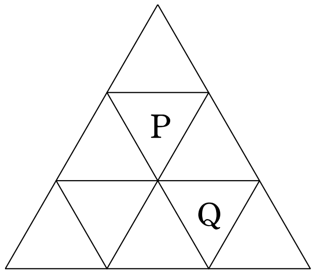
等号成立は $u=\dfrac{2}{u}$ すなわち $u=\sqrt{2}$（$1<u<2$ を満たす）のとき成り立つから

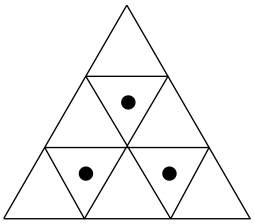
$u+\dfrac{2}{u}$ の最小値は $2\sqrt{2}$

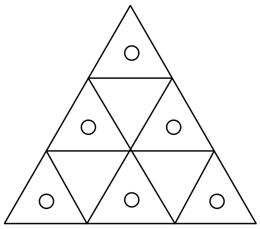
よって，$\triangle\mathrm{ACD}$ の最大値は $3-2\sqrt{2}$

[東京大学 2012 年前期 文科 $\boxed{3}$]

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。







●にいるときは次に○に移動し，○にいるときは次に●に移動する。

最初は●にいるので，偶数秒後は●，奇数秒後は○にいる。

求める確率を q_n とする。

n が奇数のときは $q_n = 0$ である。

以下，n を偶数とする。

このとき，漸化式 $q_{n+2} = q_n \times \left(\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) + (1 - q_n) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{6}$ が成り立つ。

これは $q_0 = 0$ とすると $n = 0$ でも成り立っている。

$$q_{n+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(q_n - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(q_{n-2} - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(q_{n-4} - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(q_{n-6} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \cdots = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \left(q_2 - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}+1} \left(q_0 - \frac{1}{3} \right)$$ となるから

$$q_n = \frac{1}{3}\left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$ である。

[東京大学 2012 年前期 文科 $\boxed{4}$]

座標平面上の放物線Cを$y=x^2+1$で定める。$s,\ t$は実数とし$t<0$を満たすとする。点$(s,\ t)$から放物線Cへ引いた接線を$\ell_1,\ \ell_2$とする。

(1) $\ell_1,\ \ell_2$の方程式を求めよ。

(2) aを正の実数とする。放物線Cと直線$\ell_1,\ \ell_2$で囲まれる領域の面積がaとなる$(s,\ t)$を全て求めよ。

(1) $y=x^2+1$ のとき $y'=2x$ であるから

$(u,\ u^2+1)$ におけるCの接線は $y=2ux-u^2+1$ …①

これが$(s,\ t)$を通るとき, $t=2us-u^2+1$

よって $u^2-2su+t-1=0$ を解いて $u=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$

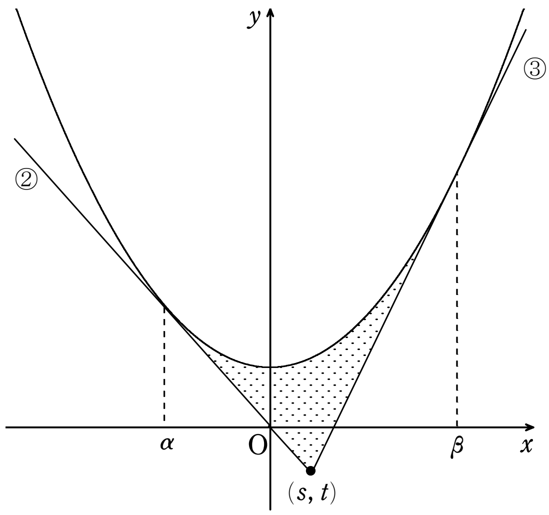
これを①に代入して $y=2\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)x-\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)^2+1$ より

求める方程式は $y=2\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)x-2s^2+t\mp\sqrt{s^2-t+1}$

(2) $\alpha=s-\sqrt{s^2-t+1}$, $\beta=s+\sqrt{s^2-t+1}$ とおくと

2 接線は $y=2\alpha x-\alpha^2+1$ …②,

$y=2\beta x-\beta^2+1$ …③



よって，題意の面積は

$$\int_\alpha^s(x^2+1-②)dx+\int_s^\beta(x^2+1-③)dx$$

$$=\int_\alpha^s(x-\alpha)^2dx+\int_s^\beta(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^s+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_s^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(s-\alpha)^3-\frac{1}{3}(s-\beta)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{s^2-t+1}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{s^2-t+1}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\left(s^2-t+1\right)^{\frac{3}{2}}\quad\cdots④$$

$s^2 \geqq 0,\ t < 0$ より ④$> \dfrac{2}{3}$ であるから

$a \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき $(s,\ t)$ は存在しない。

$a > \dfrac{2}{3}$ のとき ④$= a$ より $s^2 - t + 1 = \left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$, $t < 0$ を満たすものすべて。