[東京大学 2012 年前期 文科 $\boxed{4}$]

座標平面上の放物線Cを$y=x^2+1$で定める。$s,\ t$は実数とし$t<0$を満たすとする。点$(s,\ t)$から放物線Cへ引いた接線を$\ell_1,\ \ell_2$とする。

(1) $\ell_1,\ \ell_2$の方程式を求めよ。

(2) aを正の実数とする。放物線Cと直線$\ell_1,\ \ell_2$で囲まれる領域の面積がaとなる$(s,\ t)$を全て求めよ。

(1) $y=x^2+1$ のとき $y'=2x$ であるから

$(u,\ u^2+1)$ におけるCの接線は $y=2ux-u^2+1$ …①

これが$(s,\ t)$を通るとき，$t=2us-u^2+1$

よって $u^2-2su+t-1=0$ を解いて $u=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$

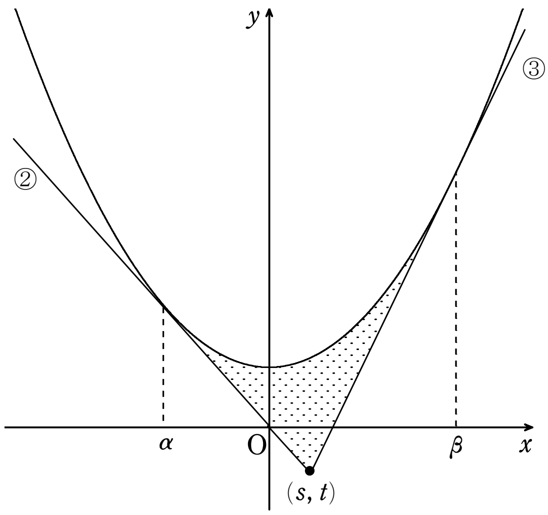
これを①に代入して $y=2\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)x-\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)^2+1$ より

求める方程式は $y=2\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)x-2s^2+t\mp\sqrt{s^2-t+1}$

(2) $\alpha=s-\sqrt{s^2-t+1}$，$\beta=s+\sqrt{s^2-t+1}$ とおくと

2 接線は $y=2\alpha x-\alpha^2+1$ …②,

$y=2\beta x-\beta^2+1$ …③



よって，題意の面積は

$$\int_\alpha^s (x^2+1-②)dx+\int_s^\beta (x^2+1-③)dx$$

$$=\int_\alpha^s (x-\alpha)^2dx+\int_s^\beta (x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^s+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_s^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(s-\alpha)^3-\frac{1}{3}(s-\beta)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{s^2-t+1}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{s^2-t+1}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\left(s^2-t+1\right)^{\frac{3}{2}}\quad …④$$

$s^2 \geqq 0,\ t<0$ より ④$>\dfrac{2}{3}$ であるから

$a \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき $(s,\ t)$ は存在しない。

$a>\dfrac{2}{3}$ のとき ④$=a$ より $s^2-t+1=\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$, $t<0$ を満たすものすべて。