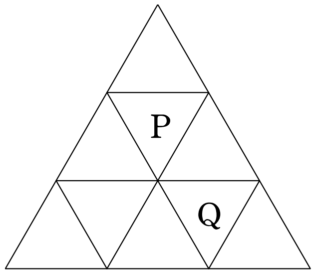
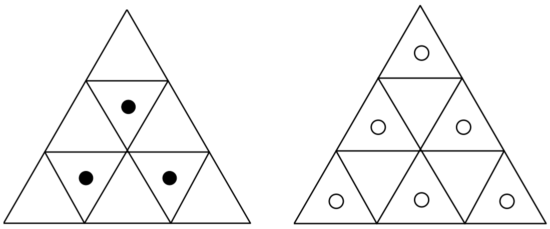
[東京大学 2012 年前期 文科 $\boxed{3}$]

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。





●にいるときは次に○に移動し，○にいるときは次に●に移動する。

最初は●にいるので，偶数秒後は●，奇数秒後は○にいる。

求める確率を q_n とする。

n が奇数のときは $q_n = 0$ である。

以下，n を偶数とする。

このとき，漸化式 $q_{n+2} = q_n \times \left(\frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right) + (1-q_n)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{6}$ が成り立つ。

これは $q_0 = 0$ とすると $n = 0$ でも成り立っている。

$$q_{n+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(q_n - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(q_{n-2} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(q_{n-4} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(q_{n-6} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(q_2 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}\left(q_0 - \frac{1}{3}\right)$$ となるから

$$q_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$$ である。