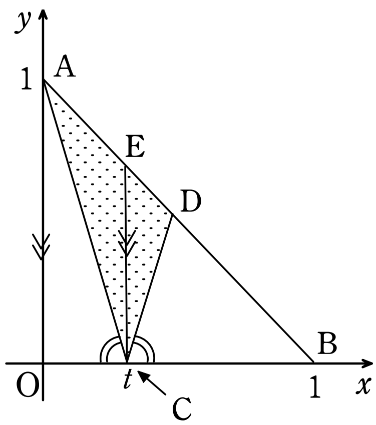
[東京大学 2012 年前期 文科 $\boxed{2}$]

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。



AC の傾きは $-\dfrac{1}{t}$，CD の傾きは $\dfrac{1}{t}$

CD の式は $y=\dfrac{1}{t}(x-t)$

これと $y=1-x$ より

D の x 座標は $\dfrac{1}{t}(x-t)=1-x$ から $x=\dfrac{2t}{1+t}$

図のように E をとると，

$\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ACE}+\triangle\mathrm{DCE}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{CE}\cdot$(D の x 座標)$=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{2t}{1+t}=\dfrac{t(1-t)}{1+t}$

ここで，$1+t=u$ とおくと $1<u<2$ であり

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{(u-1)(2-u)}{u}=\frac{3u-u^2-2}{u}=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

相加平均・相乗平均の関係より $u+\dfrac{2}{u}\geqq 2\sqrt{u\cdot\dfrac{2}{u}}=2\sqrt{2}$

等号成立は $u=\dfrac{2}{u}$ すなわち $u=\sqrt{2}$ （$1<u<2$ を満たす）のとき成り立つから

$u+\dfrac{2}{u}$ の最小値は $2\sqrt{2}$

よって，$\triangle\mathrm{ACD}$ の最大値は $3-2\sqrt{2}$