[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{1}$]

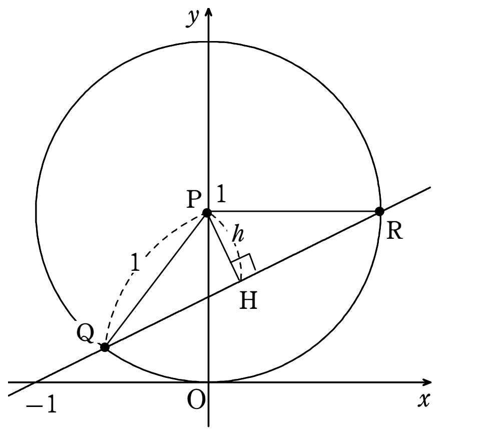
座標平面において，点 $\mathrm{P}(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。

a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。

(1) P から直線 $y=a(x+1)$ に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{PH}=h$ とおく。



$$h=\frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}},\quad \mathrm{QR}=2\mathrm{QH}=2\sqrt{1-h^2}$$ であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot\mathrm{PH}=\sqrt{1-h^2}\cdot h$$

$$=\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}\cdot\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

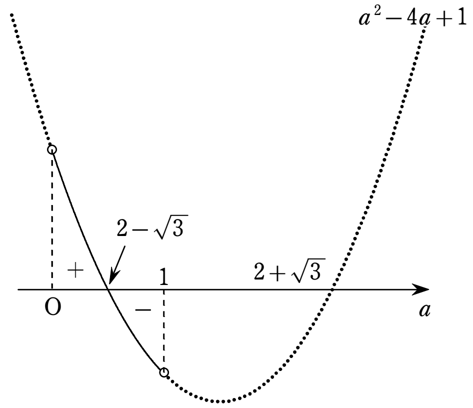
(2) $$\frac{1}{\sqrt{2}}S(a)=\frac{\sqrt{a}(1-a)}{a^2+1}=\frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{a^2+1}=f(a)$$ とおく。

$$f'(a)=\frac{\left(\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^2+1\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\cdot 2a}{\left(a^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(1-3a)(a^2+1)-(a-a^2)\cdot 4a}{2\sqrt{a}\left(a^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{a^3-3a^2-3a+1}{2\sqrt{a}\left(a^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-4a+1)}{2\sqrt{a}\left(a^2+1\right)^2}$$



$0<a<1$ のとき a^2-4a+1 の符号と $f'(a)$ の符号は一致する。

$f'(a)$ の符号は図のようになり，$f(a)$ は $a=2-\sqrt{3}$ のときに最大になる。

このとき $S(a)$ も最大になる。

[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{2}$]

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2, 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

（ⅰ） $a_1 = \langle a \rangle$

（ⅱ） $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。

---

(1) $\sqrt{2}$ の整数部分は 1 だから $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle$ であり，$\sqrt{2}+1$ の整数部分は 2 だから $a_2 = \left(\sqrt{2}+1\right) - 2 = \sqrt{2} - 1$

$a_2 = a_1$ であるから，a_3 以降も a_1 と同じで $a_n = \sqrt{2} - 1$

(2) $a_1 = a$ であることが必要。

a は小数部分であるから $a \geqq \dfrac{1}{3}$ と合わせて $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ …①

さらに，$a_2 = a$ であることが必要だが，このとき a_3 以降も a になり，十分である。

$a_2 = a$ より $a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a_1} \right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = a$

よって，$\dfrac{1}{a} - a$ は整数であるが，①より $1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ であるから

$\dfrac{1}{a}-a=1$ …② または $\dfrac{1}{a}-a=2$ …③

②より $a^2+a-1=0$ これと①より $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

③より $a^2+2a-1=0$ これと①より $a=-1+\sqrt{2}$

よって $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, -1+\sqrt{2}$

(3) 帰納的に，a_n は有理数で $0 \leqq a_n < 1$ …④

$a_n \neq 0$ のとき，$a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$（p_n, q_n は互いに素な自然数で $p_n < q_n$）とおけ，

q_n を p_n で割った商を s_n，余りを r_n とすると

$$a_{n+1}=\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle=\left\langle \frac{q_n}{p_n} \right\rangle=\left\langle s_n+\frac{r_n}{p_n} \right\rangle=\frac{r_n}{p_n}$$

よって，（a_{n+1} の分母） ≦ （a_n の分母）-1

これと a_1 の分母が q であることから，a_q より前に $a_n=0$ となるか，a_q の分母が 1 になるが，

後者のとき④より a_q の分子は 0 であるから，いずれにせよ $a_q=0$ が成り立つ。

[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{3}$]

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す。

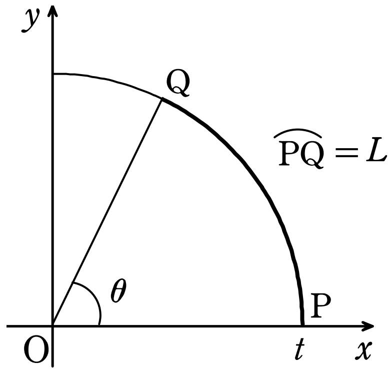
(1) $u(t),\ v(t)$ を求めよ。

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分 $f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$ を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{a\to+0}\dfrac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。

---

(1) P から Q への回転角を θ とおく。



$t\theta=L$ より $\theta=\dfrac{L}{t}$ なので

$u(t)=t\cos\dfrac{L}{t}$， $v(t)=t\sin\dfrac{L}{t}$

(2) $u'(t)=\cos\dfrac{L}{t}+t\cdot\left(-\sin\dfrac{L}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{L}{t^2}\right)=\cos\dfrac{L}{t}+\dfrac{L}{t}\sin\dfrac{L}{t}$

$v'(t)=\sin\dfrac{L}{t}+t\cdot\cos\dfrac{L}{t}\cdot\left(-\dfrac{L}{t^2}\right)=\sin\dfrac{L}{t}-\dfrac{L}{t}\cos\dfrac{L}{t}$ であるから

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\left(\cos\frac{L}{t}+\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t}\right)^2+\left(\sin\frac{L}{t}-\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^1\sqrt{1+\frac{L^2}{t^2}}\,dt$$

$$=\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}dt$$

$\sqrt{t^2+L^2}=s$ とおくと $t^2+L^2=s^2$ より $t^2=s^2-L^2$

これより $2tdt=2sds \Leftrightarrow tdt=sds$

よって $f(a)=\int_a^1\dfrac{\sqrt{t^2+L^2}}{t^2}\cdot tdt$

$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\frac{s}{s^2-L^2}\cdot sds$$

$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\frac{s^2}{s^2-L^2}ds$$

$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\left(1+\frac{L^2}{s^2-L^2}\right)ds$$

$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\left\{1+\frac{L}{2}\left(\frac{1}{s-L}-\frac{1}{s+L}\right)\right\}ds$$

$$=\left[s+\frac{L}{2}\log\frac{s+L}{s-L}\right]_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}$$

$$=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}\ +\frac{L}{2}\left(\log\frac{\sqrt{1+L^2}-L}{\sqrt{1+L^2}+L}-\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}-L}{\sqrt{a^2+L^2}+L}\right)$$

$$=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}\ +\frac{L}{2}\left\{\log\left(\sqrt{1+L^2}-L\right)^2-\log\frac{\left(\sqrt{a^2+L^2}-L\right)^2}{a^2}\right\}$$

$$=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}\ +L\left\{\log\left(\sqrt{1+L^2}-L\right)-\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}-L}{a}\right\}$$

（3）$a\to+0$ のとき $\log a\to-\infty$ なので $\dfrac{\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\log\left(\sqrt{1+L^2}-L\right)}{\log a}\to 0$

また，$\dfrac{\log\dfrac{\sqrt{a^2+L^2}-L}{a}}{\log a}=\dfrac{\log\dfrac{a}{\sqrt{a^2+L^2}+L}}{\log a}=\dfrac{\log a-\log\left(\sqrt{a^2+L^2}+L\right)}{\log a}\to 1$ である。

したがって $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=0-L=-L$

[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{4}$]

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。

放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta, \beta^2)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2$ より $\left(\alpha - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \dfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\beta - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2 - \dfrac{1}{4}\right)^2$ …①

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 - (\alpha - \beta) + \alpha^4 - \beta^4 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = 0$$

$\alpha \neq \beta$ なので $\alpha - \beta \neq 0$ より

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) - 2 + (\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = 0 \quad \cdots②$$

また，$X = \dfrac{1}{3}\left(\alpha + \beta + \dfrac{1}{2}\right)$, $Y = \dfrac{1}{3}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \dfrac{1}{4}\right)$ より

$\alpha + \beta = 3X - \dfrac{1}{2}$ …③，$\alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \dfrac{1}{4}$ …④

②に代入して $3X - \dfrac{1}{2} - 2 + 2\left(3X - \dfrac{1}{2}\right)\left(3Y - \dfrac{1}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(3X - \frac{1}{2}\right)\left(6Y + \frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{6}\right)\left(Y + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{9} \quad \cdots⑤$$

ここで，α, β は $\dfrac{1}{2}$ 以外の異なる実数であるが，

①より α, β の一方が $\dfrac{1}{2}$ のとき，他方も $\dfrac{1}{2}$ となり，このとき $\alpha = \beta$ であるから

$\alpha \neq \beta$ であるならば α, β は $\dfrac{1}{2}$ と異なる。

よって，異なる実数になるための条件だけを考えればよい。

$\alpha+\beta=③=s$， $\alpha^2+\beta^2=④=t$ とおくと

$$\alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)}{2}=\frac{s^2-t}{2}$$

$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式 $z^2-sz+\frac{s^2-t}{2}=0$ の 2 解であるから

$s^2-2(s^2-t)>0$ より $2t>s^2$ …⑥

また，②より $s-2+2st=0$ なので $2t=\frac{2-s}{s}$

これと⑥より $\frac{2-s}{s}>s^2 \Leftrightarrow \frac{s^3+s-2}{s}<0$

$\Leftrightarrow \frac{(s-1)(s^2+s+2)}{s}<0$ となるので $0<s<1$

したがって $0<3X-\frac{1}{2}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{6}<X<\frac{1}{2}$ …⑦

⑤，⑦より求める軌跡は $\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9},\ \frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$

[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{5}$]

$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a, b; c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a, b; c]$ に対して $w([a, b; c]) = p - q - (a+b)$ とおく。

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。

また，$w([a, b; c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2) s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

(3) $(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。

$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ …①，$b \leqq c \leqq a$ …②,

$w([a, b; c]) = p - q - (a+b)$ …③

(1) $w([a, b; c]) = -q \iff p - q - (a+b) = -q$ より $a + b = p$

ここで，$a \leqq p,\ b \leqq 0$ であるから $a,\ b$ は $(a,\ b) = (p,\ 0)$ の 1 個。

②より $0 \leqq c \leqq p$ なので c は $p+1$ 個。

よって，全部で $1 \times (p+1) = p+1$ 個。

また，$w([a, b; c]) = p \iff p - q - (a+b) = p$ より $a + b = -q$

ここで，$b \geqq -q,\ a \geqq 0$ であるから $a,\ b$ は $(a,\ b) = (0,\ -q)$ の 1 個。

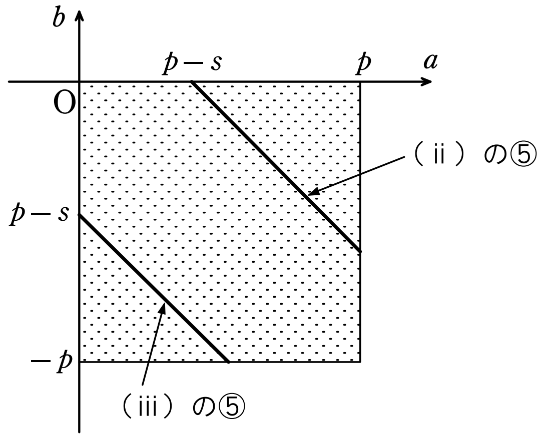
②より $-q \leqq c \leqq 0$ なので c は $q+1$ 個。

(2) $p = q$ のとき，①より $-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ …④

③より $w([a, b; c]) = -(a+b)$

$w([a, b; c]) = -p + s \iff a + b = p - s$ …⑤

④より，$(a,\ b)$ は図の打点部分にある。



（ⅰ）$s < 0$ または $s > 2p$ のとき

0 個。

（ⅱ）$0 \leqq s \leqq p$ のとき

$(a,\ b) = (p-s+k,\ -k),\ 0 \leqq k \leqq s$ であり，各 $(a,\ b)$ に対して

c は②より $a-b+1 = p-s+2k+1$ 個ある。

よって，このとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{s}\left(p-s+2k+1\right) = \frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2}\cdot(s+1)$

$= (p+1)(s+1)$ 個。

（ⅲ）$p+1 \leqq s \leqq 2p$ のとき

$(a,\ b) = (k,\ p-s-k),\ 0 \leqq k \leqq 2p-s$ であり，各 $(a,\ b)$ に対して

c は②より $a-b+1 = 2k-p+s+1$ 個ある。

よって，このとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-s}\left(2k-p+s+1\right) = \frac{(-p+s+1)+(3p-s+1)}{2}\cdot(2p-s+1)$

$= (p+1)(2p-s+1)$ 個。

(3) (2)の s を変化させて加えればよいので

$$\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1) + \sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1) = (p+1)\left\{\frac{1}{2}(p+1)(p+2) + \frac{1}{2}p(p+1)\right\}$$

$$= (p+1)^2\left\{\frac{1}{2}(p+2) + \frac{1}{2}p\right\}$$

$$= (p+1)^3 \text{ 個。}$$

[注] (3)について

$-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$ を満たす $a,\ b,\ c$ の個数を求める問題。

・$-p \leqq b \leqq c \leqq a \leqq p$ → ${}_{2p+1}\mathrm{H}_3 = {}_{2p+3}\mathrm{C}_3$

・$1 \leqq b \leqq c \leqq a \leqq p$ ，$-p \leqq b \leqq c \leqq a \leqq -1$ → それぞれ ${}_{p}\mathrm{H}_3 = {}_{p+2}\mathrm{C}_3$

よって ${}_{2p+3}\mathrm{C}_3 - {}_{p+2}\mathrm{C}_3 \times 2 = (p+1)^3$

[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{6}$]

(1) $x,\ y$ を実数とし，$x>0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して $0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3) 次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ からなる座標空間内の領域を V とする。

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ が成り立つ。

V の体積を求めよ。

---

(1) $f(t)=xt^2+yt=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}$ であり，$f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=-\dfrac{y^2}{4x}$，$f(0)=0$，$f(1)=x+y$

である。$0\leqq t\leqq 1$ における最大値を M，最小値を m とおく。

(ⅰ) $-\dfrac{y}{2x}\leqq 0$ すなわち $y\geqq 0$ のとき

$M-m=f(1)-f(0)=x+y$ …①

(ⅱ) $0\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $-x\leqq y\leqq 0$ のとき

$M-m=f(1)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=x+y+\dfrac{y^2}{4x}$ …②

(ⅲ) $\dfrac{1}{2}\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq 1$ すなわち $-2x\leqq y\leqq -x$ のとき

$M-m=f(0)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=\dfrac{y^2}{4x}$ …③

(ⅳ) $1\leqq -\dfrac{y}{2x}$ すなわち $y\leqq -2x$ のとき

$M-m=f(0)-f(1)=-(x+y)$ …④

(2) $0 \leqq f(t)+z \leqq 1$ が $0 \leqq t \leqq 1$ のすべての t で成り立つための条件は

$f(t)=m$ が $0 \leqq f(t)+z$ を満たし，

$f(t)=M$ が $f(t)+z \leqq 1$ を満たすことである。

よって，$0 \leqq m+z,\ M+z \leqq 1$ より $-m \leqq z \leqq 1-M$ …⑤

⑤を満たす z が存在するための条件は

$-m \leqq 1-M \iff M-m \leqq 1$ であるから

(1)より $y \geqq 0$ のとき $x+y \leqq 1$

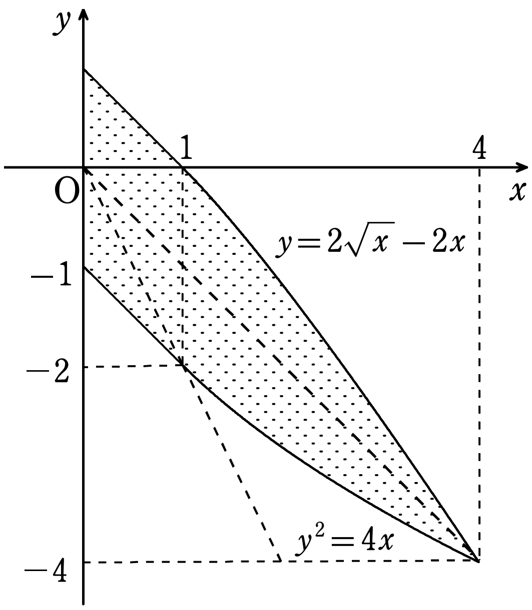
$-x \leqq y \leqq 0$ …⑥ のとき ② $\leqq 1$ より $(2x+y)^2 \leqq 4x$

⑥では $2x+y \geqq 0$ であるから，$2x+y \leqq 2\sqrt{x} \iff y \leqq 2\sqrt{x}-2x$

$-2x \leqq y \leqq -x$ のとき ③ $\leqq 1$ より $y^2 \leqq 4x$

$y \leqq -2x$ のとき ④ $\leqq 1$ より $x+y \geqq -1$

答えは図の打点部分（y 軸上は除き，他の境界は含む)。

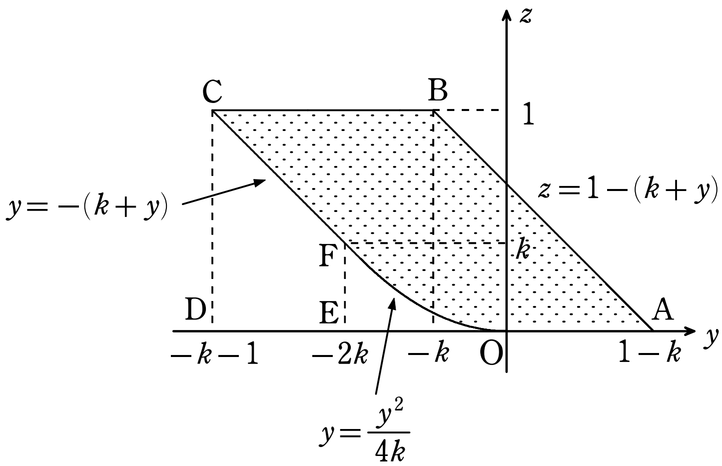


(3) V は $0 \leqq x \leqq 1$ かつ⑤である。

⑤で，$m = m(x,\ y)$，$M = M(x,\ y)$ と表すと，$-m(x,\ y) \leqq z \leqq 1 - M(x,\ y)$ である。

平面 $x = k$（$0 \leqq k \leqq 1$）による切り口 V_k は $-m(k,\ y) \leqq z \leqq 1 - M(k,\ y)$ であり，

(1)の過程の x を k にすることで，図のようになる。



よって（V_k の面積）＝（台形ABCD）－（台形CDEF）$-\int_{-2k}^{0} \frac{y^2}{4k} dy$

$$= \frac{1}{2}(1+2)\cdot 1 - \frac{1}{2}(k+1)(1-k) + \frac{(-2k)^3}{12k}$$

$$= 1 - \frac{k^2}{6}$$

したがって，V の体積は $\int_0^1 \left(1 - \frac{k^2}{6}\right) dk = \frac{17}{18}$