[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{6}$]

(1) $x,\ y$ を実数とし，$x>0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して $0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3) 次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ からなる座標空間内の領域を V とする。

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ が成り立つ。

V の体積を求めよ。

---

(1) $f(t)=xt^2+yt=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}$ であり，$f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=-\dfrac{y^2}{4x}$，$f(0)=0$，$f(1)=x+y$

である。$0\leqq t\leqq 1$ における最大値を M，最小値を m とおく。

(i) $-\dfrac{y}{2x}\leqq 0$ すなわち $y\geqq 0$ のとき

$M-m=f(1)-f(0)=x+y$ …①

(ii) $0\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $-x\leqq y\leqq 0$ のとき

$M-m=f(1)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=x+y+\dfrac{y^2}{4x}$ …②

(iii) $\dfrac{1}{2}\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq 1$ すなわち $-2x\leqq y\leqq -x$ のとき

$M-m=f(0)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=\dfrac{y^2}{4x}$ …③

(iv) $1\leqq -\dfrac{y}{2x}$ すなわち $y\leqq -2x$ のとき

$M-m=f(0)-f(1)=-(x+y)$ …④

(2) $0 \leqq f(t)+z \leqq 1$ が $0 \leqq t \leqq 1$ のすべての t で成り立つための条件は

$f(t)=m$ が $0 \leqq f(t)+z$ を満たし,

$f(t)=M$ が $f(t)+z \leqq 1$ を満たすことである。

よって, $0 \leqq m+z,\ M+z \leqq 1$ より $-m \leqq z \leqq 1-M$ …⑤

⑤を満たす z が存在するための条件は

$-m \leqq 1-M \iff M-m \leqq 1$ であるから

(1)より $y \geqq 0$ のとき $x+y \leqq 1$

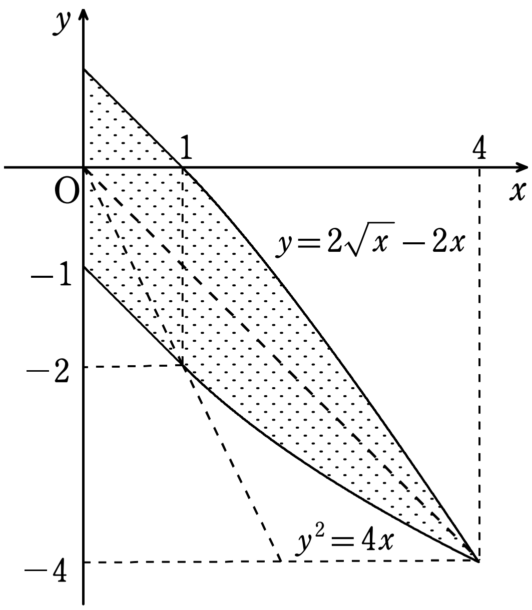
$-x \leqq y \leqq 0$ …⑥ のとき ② $\leqq 1$ より $(2x+y)^2 \leqq 4x$

⑥では $2x+y \geqq 0$ であるから, $2x+y \leqq 2\sqrt{x} \iff y \leqq 2\sqrt{x}-2x$

$-2x \leqq y \leqq -x$ のとき ③ $\leqq 1$ より $y^2 \leqq 4x$

$y \leqq -2x$ のとき ④ $\leqq 1$ より $x+y \geqq -1$

答えは図の打点部分(y 軸上は除き,他の境界は含む)。

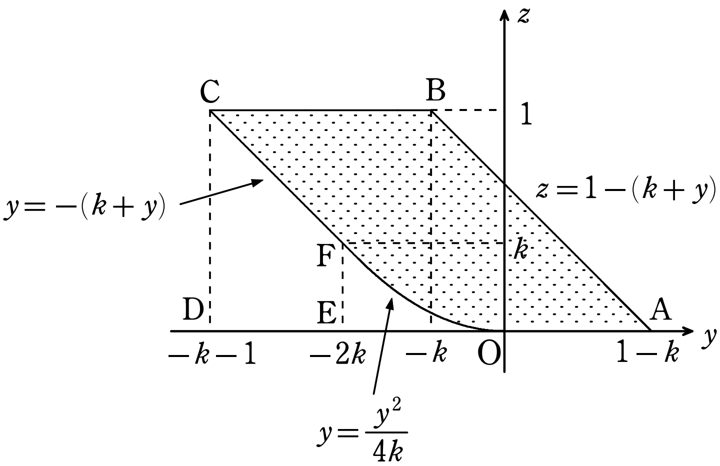


(3) V は $0 \leqq x \leqq 1$ かつ⑤である。

⑤で，$m = m(x,\ y)$，$M = M(x,\ y)$ と表すと，$-m(x,\ y) \leqq z \leqq 1 - M(x,\ y)$ である。

平面 $x = k$（$0 \leqq k \leqq 1$）による切り口 V_k は $-m(k,\ y) \leqq z \leqq 1 - M(k,\ y)$ であり，

(1)の過程の x を k にすることで，図のようになる。



よって（V_k の面積）＝（台形ABCD）－（台形CDEF）$-\displaystyle\int_{-2k}^{0} \frac{y^2}{4k}\,dy$

$$= \frac{1}{2}(1+2)\cdot 1 - \frac{1}{2}(k+1)(1-k) + \frac{(-2k)^3}{12k}$$

$$= 1 - \frac{k^2}{6}$$

したがって，V の体積は $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{k^2}{6}\right) dk = \frac{17}{18}$