

[東京大学 2011 年前期 理科 5]



p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件 $-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, b \leq c \leq a$

を満たすものを考え、このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ。

各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して $w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ とおく。

(1) (p, q) パターンのうち、 $w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。

また、 $w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2) s を整数とする。 (p, p) パターンで $w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

(3) (p, p) パターンの総数を求めよ。



$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p \quad \cdots \textcircled{1}, \quad b \leq c \leq a \quad \cdots \textcircled{2},$$

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b) \quad \cdots \textcircled{3}$$

(1) $w([a, b; c]) = -q \Leftrightarrow p - q - (a + b) = -q$ より $a + b = p$

ここで、 $a \leq p, b \leq 0$ であるから a, b は $(a, b) = (p, 0)$ の 1 個。

②より $0 \leq c \leq p$ なので c は $p + 1$ 個。

よって、全部で $1 \times (p + 1) = p + 1$ 個。

また、 $w([a, b; c]) = p \Leftrightarrow p - q - (a + b) = p$ より $a + b = -q$

ここで、 $b \geq -q, a \geq 0$ であるから a, b は $(a, b) = (0, -q)$ の 1 個。

②より $-q \leq c \leq 0$ なので c は $q + 1$ 個。

(2) $p = q$ のとき、①より $-p \leq b \leq 0 \leq a \leq p \quad \cdots \textcircled{4}$

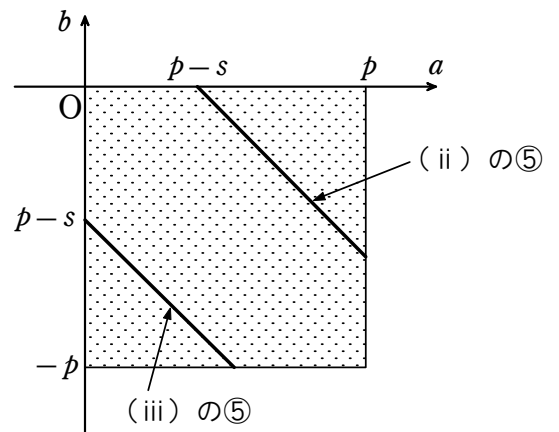
③より $w([a, b; c]) = -(a + b)$

$$w([a, b; c]) = -p + s \Leftrightarrow a + b = p - s \quad \cdots \textcircled{5}$$

④より、 (a, b) は図の打点部分にある。

(i) $s < 0$ または $s > 2p$ のとき

0 個。



(ii) $0 \leq s \leq p$ のとき

$(a, b) = (p-s+k, -k)$, $0 \leq k \leq s$ であり, 各 (a, b) に対して

c は②より $a-b+1 = p-s+2k+1$ 個ある。

$$\begin{aligned} \text{よって, このとき } \sum_{k=0}^s (p-s+2k+1) &= \frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2} \cdot (s+1) \\ &= (p+1)(s+1) \text{ 個。} \end{aligned}$$

(iii) $p+1 \leq s \leq 2p$ のとき

$(a, b) = (k, p-s-k)$, $0 \leq k \leq 2p-s$ であり, 各 (a, b) に対して

c は②より $a-b+1 = 2k-p+s+1$ 個ある。

$$\begin{aligned} \text{よって, このとき } \sum_{k=0}^{2p-s} (2k-p+s+1) &= \frac{(-p+s+1)+(3p-s+1)}{2} \cdot (2p-s+1) \\ &= (p+1)(2p-s+1) \text{ 個。} \end{aligned}$$

(3) (2)の s を変化させて加えればよいので

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^p (p+1)(s+1) + \sum_{s=p+1}^{2p} (p+1)(2p-s+1) &= (p+1) \left\{ \frac{1}{2}(p+1)(p+2) + \frac{1}{2}p(p+1) \right\} \\ &= (p+1)^2 \left\{ \frac{1}{2}(p+2) + \frac{1}{2}p \right\} \\ &= (p+1)^3 \text{ 個。} \end{aligned}$$

[注] (3)について

$-p \leq b \leq 0 \leq a \leq p$, $b \leq c \leq a$ を満たす a, b, c の個数を求める問題。

$$\cdot -p \leq b \leq c \leq a \leq p \rightarrow {}_{2p+1}H_3 = {}_{2p+3}C_3$$

$$\cdot 1 \leq b \leq c \leq a \leq p, -p \leq b \leq c \leq a \leq -1 \rightarrow \text{それぞれ } {}_pH_3 = {}_{p+2}C_3$$

$$\text{よって } {}_{2p+3}C_3 - {}_{p+2}C_3 \times 2 = (p+1)^3$$