[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{4}$]

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる。

放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta, \beta^2)$ を，3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle \mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}^2$ より $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2$ …①

$$\Leftrightarrow\ \alpha^2-\beta^2-(\alpha-\beta)+\alpha^4-\beta^4-\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^2-\beta^2-2(\alpha-\beta)+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0$$

$\alpha\neq\beta$ なので $\alpha-\beta\neq 0$ より

$$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta)-2+\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0 \quad \cdots②$$

また，$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$, $Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)$ より

$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}$ …③，$\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$ …④

②に代入して $3X-\frac{1}{2}-2+2\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(3Y-\frac{1}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\ \left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2$$

$$\Leftrightarrow\ \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9} \quad \cdots⑤$$

ここで，α, β は $\frac{1}{2}$ 以外の異なる実数であるが，

①より α, β の一方が $\frac{1}{2}$ のとき，他方も $\frac{1}{2}$ となり，このとき $\alpha=\beta$ であるから

$\alpha\neq\beta$ であるならば α, β は $\frac{1}{2}$ と異なる。

よって，異なる実数になるための条件だけを考えればよい。

$\alpha+\beta=$③$=s$，$\alpha^2+\beta^2=$④$=t$　とおくと

$$\alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)}{2}=\frac{s^2-t}{2}$$

$\alpha,\ \beta$　は2次方程式　$z^2-sz+\dfrac{s^2-t}{2}=0$　の2解であるから

$s^2-2(s^2-t)>0$　より　$2t>s^2$　…⑥

また，②より　$s-2+2st=0$　なので　$2t=\dfrac{2-s}{s}$

これと⑥より　$\dfrac{2-s}{s}>s^2 \iff \dfrac{s^3+s-2}{s}<0$

$\iff \dfrac{(s-1)(s^2+s+2)}{s}<0$　となるので　$0<s<1$

したがって　$0<3X-\dfrac{1}{2}<1 \iff \dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}$　…⑦

⑤，⑦より求める軌跡は　$\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(y+\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{2}$