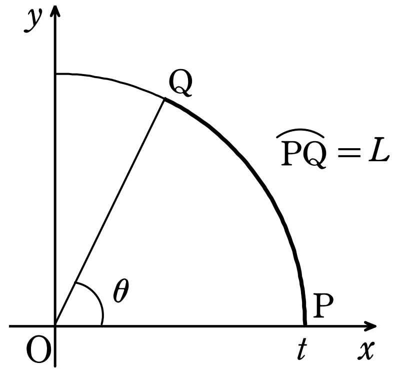
[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{3}$]

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1) $u(t),\ v(t)$ を求めよ。

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分 $f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。



(1) P から Q への回転角を θ とおく。

$t\theta=L$ より $\theta=\dfrac{L}{t}$ なので

$u(t)=t\cos\dfrac{L}{t}$，$v(t)=t\sin\dfrac{L}{t}$

(2) $$u'(t)=\cos\frac{L}{t}+t\cdot\left(-\sin\frac{L}{t}\right)\cdot\left(-\frac{L}{t^2}\right)=\cos\frac{L}{t}+\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t}$$

$$v'(t)=\sin\frac{L}{t}+t\cdot\cos\frac{L}{t}\cdot\left(-\frac{L}{t^2}\right)=\sin\frac{L}{t}-\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}$$ であるから

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\left(\cos\frac{L}{t}+\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t}\right)^2+\left(\sin\frac{L}{t}-\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^1\sqrt{1+\frac{L^2}{t^2}}\,dt$$

$$=\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}dt$$

$\sqrt{t^2+L^2}=s$ とおくと $t^2+L^2=s^2$ より $t^2=s^2-L^2$

これより $2tdt=2sds \Leftrightarrow tdt=sds$

よって $$f(a)=\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t^2}\cdot tdt$$
$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\frac{s}{s^2-L^2}\cdot sds$$

$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}} \frac{s^2}{s^2-L^2}ds$$

$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}} \left(1+\frac{L^2}{s^2-L^2}\right)ds$$

$$=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}} \left\{1+\frac{L}{2}\left(\frac{1}{s-L}-\frac{1}{s+L}\right)\right\}ds$$

$$=\left[s+\frac{L}{2}\log\frac{s+L}{s-L}\right]_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}$$

$$=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+\frac{L}{2}\left(\log\frac{\sqrt{1+L^2}-L}{\sqrt{1+L^2}+L}-\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}-L}{\sqrt{a^2+L^2}+L}\right)$$

$$=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+\frac{L}{2}\left\{\log\left(\sqrt{1+L^2}-L\right)^2-\log\frac{\left(\sqrt{a^2+L^2}-L\right)^2}{a^2}\right\}$$

$$=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\left\{\log\left(\sqrt{1+L^2}-L\right)-\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}-L}{a}\right\}$$

（3）$a\to+0$ のとき $\log a\to-\infty$ なので $\dfrac{\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\log\left(\sqrt{1+L^2}-L\right)}{\log a}\to 0$

また，$\dfrac{\log\dfrac{\sqrt{a^2+L^2}-L}{a}}{\log a}=\dfrac{\log\dfrac{a}{\sqrt{a^2+L^2}+L}}{\log a}=\dfrac{\log a-\log\left(\sqrt{a^2+L^2}+L\right)}{\log a}\to 1$ である。

したがって $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=0-L=-L$