[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{2}$]

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める。

（ｉ） $a_1 = \langle a \rangle$

（ⅱ） $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。

---

(1) $\sqrt{2}$ の整数部分は 1 だから $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle$ であり，$\sqrt{2}+1$ の整数部分は 2 だから $a_2 = \left(\sqrt{2}+1\right) - 2 = \sqrt{2} - 1$

$a_2 = a_1$ であるから，a_3 以降も a_1 と同じで $a_n = \sqrt{2} - 1$

(2) $a_1 = a$ であることが必要。

a は小数部分であるから $a \geqq \dfrac{1}{3}$ と合わせて $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ …①

さらに，$a_2 = a$ であることが必要だが，このとき a_3 以降も a になり，十分である。

$a_2 = a$ より $a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a_1} \right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = a$

よって，$\dfrac{1}{a} - a$ は整数であるが，①より $1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ であるから

$$\frac{1}{a}-a=1 \quad \cdots② \quad \text{または} \quad \frac{1}{a}-a=2 \quad \cdots③$$

②より $a^2+a-1=0$ これと①より $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

③より $a^2+2a-1=0$ これと①より $a=-1+\sqrt{2}$

よって $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1+\sqrt{2}$

(3) 帰納的に，a_n は有理数で $0 \leqq a_n < 1$ …④

$a_n \neq 0$ のとき，$a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$（p_n, q_n は互いに素な自然数で $p_n < q_n$）とおけ，

q_n を p_n で割った商を s_n，余りを r_n とすると

$$a_{n+1}=\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle = \left\langle \frac{q_n}{p_n} \right\rangle = \left\langle s_n+\frac{r_n}{p_n} \right\rangle = \frac{r_n}{p_n}$$

よって，（a_{n+1} の分母） ≦ （a_n の分母）-1

これと a_1 の分母が q であることから，a_q より前に $a_n=0$ となるか，a_q の分母が 1 になるが，

後者のとき④より a_q の分子は 0 であるから，いずれにせよ $a_q=0$ が成り立つ。