[東京大学 2011 年前期 理科 $\boxed{1}$]

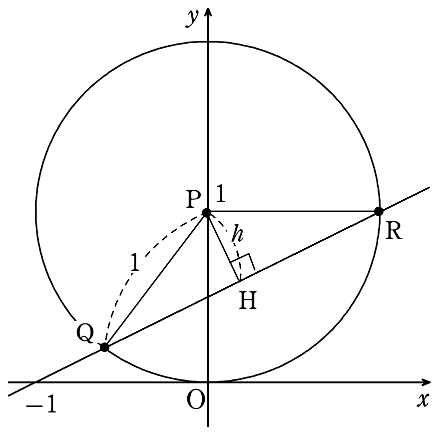
座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする。

a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。

(1) P から直線 $y=a(x+1)$ に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{PH}=h$ とおく。



$h=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\mathrm{QR}=2\mathrm{QH}=2\sqrt{1-h^2}$ であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot\mathrm{PH}=\sqrt{1-h^2}\cdot h$$

$$=\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}\cdot\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

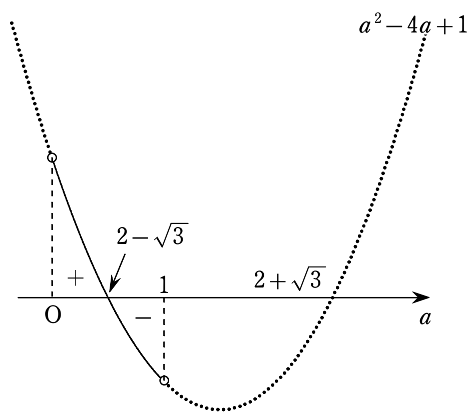
(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}S(a)=\dfrac{\sqrt{a}(1-a)}{a^2+1}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{a^2+1}=f(a)$ とおく。

$$f'(a)=\frac{\left(\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^2+1\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\cdot 2a}{\left(a^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(1-3a)(a^2+1)-(a-a^2)\cdot 4a}{2\sqrt{a}\left(a^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{a^3-3a^2-3a+1}{2\sqrt{a}\left(a^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-4a+1)}{2\sqrt{a}\left(a^2+1\right)^2}$$



$0<a<1$ のとき a^2-4a+1 の符号と $f'(a)$ の符号は一致する。

$f'(a)$ の符号は図のようになり，$f(a)$ は $a=2-\sqrt{3}$ のときに最大になる。

このとき $S(a)$ も最大になる。