[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{1}$]

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が 3 つの条件 $f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$ を全て満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

$f(1)=a+b+c+d=1$ …①

$f(-1)=-a+b-c+d=-1$ …②

$\int_{-1}^{1}\left(bx^2+cx+d\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(bx^2+d\right)dx=\frac{2}{3}b+2d=1$ …③

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$ であり，

①＋②より $b+d=0 \Leftrightarrow d=-b$

よって $b=-\frac{3}{4},\ d=\frac{3}{4}$ …④

したがって，$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\frac{3}{2}\right)^2dx$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx$$

$$=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}$$

$$=\frac{27}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right\}$$

となり，I は $a=-\frac{1}{4}$ のときに最小値 $\frac{27}{2}\cdot\frac{3}{16}=\frac{81}{32}$ をとる。

このとき，①－②より $a+c=1$ であるから $c=\frac{5}{4}$

よって，$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$

[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{2}$]

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2, 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

（ｉ） $a_1 = \langle a \rangle$

（ⅱ） $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

---

(1) $\sqrt{2}$ の整数部分は 1 だから $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2}-1$

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle$ であり，$\sqrt{2}+1$ の整数部分は 2 だから $a_2 = \left(\sqrt{2}+1\right)-2 = \sqrt{2}-1$

$a_2 = a_1$ であるから，a_3 以降も a_1 と同じで $a_n = \sqrt{2}-1$

(2) $a_1 = a$ であることが必要。a は小数部分であるから $a \geqq \dfrac{1}{3}$ と合わせて $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ …①

さらに，$a_2 = a$ であることが必要だが，このとき a_3 以降も a になり，十分である。

$a_2 = a$ より $a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a_1} \right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = a$

よって，$\dfrac{1}{a}-a$ は整数であるが，①より $1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ であるから

$\dfrac{1}{a}-a=1$ …② または $\dfrac{1}{a}-a=2$ …③

②より $a^2+a-1=0$ これと①より $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

③より $a^2+2a-1=0$ これと①より $a=-1+\sqrt{2}$ よって $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1+\sqrt{2}$

[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{3}$]

$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a, b; c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。

各 $(p,\ q)$ パターン $[a, b; c]$ に対して $w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ とおく。

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。

また，$w([a, b; c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2) s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ …①，$b \leqq c \leqq a$ …②,

$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ …③

(1) $w([a, b; c]) = -q \Leftrightarrow p - q - (a + b) = -q$ より $a + b = p$

ここで，$a \leqq p,\ b \leqq 0$ であるから $a,\ b$ は $(a,\ b) = (p,\ 0)$ の 1 個。

②より $0 \leqq c \leqq p$ なので c は $p + 1$ 個。

よって，全部で $1 \times (p + 1) = p + 1$ 個。

また，$w([a, b; c]) = p \Leftrightarrow p - q - (a + b) = p$ より $a + b = -q$

ここで，$b \geqq -q,\ a \geqq 0$ であるから $a,\ b$ は $(a,\ b) = (0,\ -q)$ の 1 個。

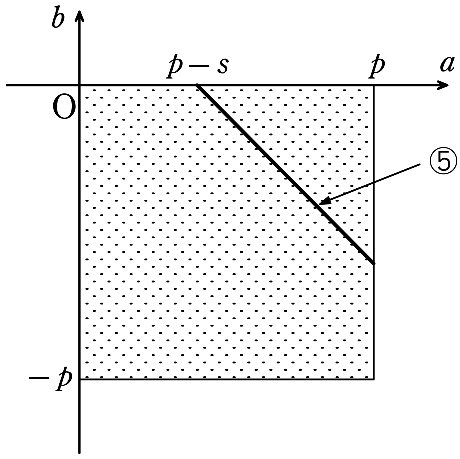
②より $-q \leqq c \leqq 0$ なので c は $q + 1$ 個。

(2) $p = q$ のとき，①より $-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ …④

③より $w([a, b; c]) = -(a + b)$

$w([a, b; c]) = -p + s \Leftrightarrow a + b = p - s$ …⑤

④より，$(a,\ b)$ は図の打点部分にある。



（ｉ）$s < 0$ のとき

0 個。

（ⅱ）$0 \leqq s \leqq p$ のとき

$(a, b)=(p-s+k, -k),\ 0 \leqq k \leqq s$ であり，各 (a, b) に対して

c は②より $a-b+1=p-s+2k+1$ 個ある。

よって，このとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{s}\left(p-s+2k+1\right)=\frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2}\cdot(s+1)$

$=(p+1)(s+1)$ 個。

[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{4}$]

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる。

放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta, \beta^2)$ を，3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}^2$ より $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2$ …①

$$\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2-(\alpha-\beta)+\alpha^4-\beta^4-\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2-2(\alpha-\beta)+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0$$

$\alpha\neq\beta$ なので $\alpha-\beta\neq0$ より

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)-2+(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0 \quad \cdots②$$

また， $X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$, $Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)$ より

$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}$ …③， $\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$ …④

②に代入して $3X-\frac{1}{2}-2+2\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(3Y-\frac{1}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2$$

$$\Leftrightarrow \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9} \quad \cdots⑤$$

ここで， α, β は $\frac{1}{2}$ 以外の異なる実数であるが，

①より α, β の一方が $\frac{1}{2}$ のとき，他方も $\frac{1}{2}$ となり，このとき $\alpha=\beta$ であるから

$\alpha\neq\beta$ であるならば α, β は $\frac{1}{2}$ と異なる。

よって，異なる実数になるための条件だけを考えればよい。

$\alpha+\beta=$③$=s$，$\alpha^2+\beta^2=$④$=t$ とおくと

$$\alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)}{2}=\frac{s^2-t}{2}$$

$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式 $z^2-sz+\dfrac{s^2-t}{2}=0$ の 2 解であるから

$s^2-2(s^2-t)>0$ より $2t>s^2$ …⑥

また，②より $s-2+2st=0$ なので $2t=\dfrac{2-s}{s}$

これと⑥より $\dfrac{2-s}{s}>s^2 \Leftrightarrow \dfrac{s^3+s-2}{s}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(s-1)(s^2+s+2)}{s}<0$ となるので $0<s<1$

したがって $0<3X-\dfrac{1}{2}<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}$ …⑦

⑤，⑦より求める軌跡は $\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(y+\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{2}$