

[ 東京大学 2011 年前期 文科 4 ]



座標平面上の 1 点  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  をとる。

放物線  $y = x^2$  上の 2 点  $Q(\alpha, \alpha^2), R(\beta, \beta^2)$  を, 3 点  $P, Q, R$  が  $QR$  を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき,  $\triangle PQR$  の重心  $G(X, Y)$  の軌跡を求めよ。



$$PQ^2 = PR^2 \text{ より } \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 - (\alpha - \beta) + \alpha^4 - \beta^4 - \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$\alpha \neq \beta$  なので  $\alpha - \beta \neq 0$  より

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) - 2 + (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

また,  $X = \frac{1}{3}\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right), Y = \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4}\right)$  より

$$\alpha + \beta = 3X - \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ に代入して } 3X - \frac{1}{2} - 2 + 2\left(3X - \frac{1}{2}\right)\left(3Y - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3X - \frac{1}{2}\right)\left(6Y + \frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{6}\right)\left(Y + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{9} \quad \dots \textcircled{5}$$

ここで,  $\alpha, \beta$  は  $\frac{1}{2}$  以外の異なる実数であるが,

①より  $\alpha, \beta$  の一方が  $\frac{1}{2}$  のとき, 他方も  $\frac{1}{2}$  となり, このとき  $\alpha = \beta$  であるから

$\alpha \neq \beta$  であるならば  $\alpha, \beta$  は  $\frac{1}{2}$  と異なる。

よって、異なる実数になるための条件だけを考えればよい。

$$\alpha + \beta = \textcircled{3} = s, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \textcircled{4} = t \quad \text{とおくと}$$

$$\alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2} = \frac{s^2 - t}{2}$$

$$\alpha, \beta \text{ は 2 次方程式 } z^2 - sz + \frac{s^2 - t}{2} = 0 \text{ の 2 解であるから}$$

$$s^2 - 2(s^2 - t) > 0 \text{ より } 2t > s^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\text{また, } \textcircled{2} \text{ より } s - 2 + 2st = 0 \text{ なので } 2t = \frac{2 - s}{s}$$

$$\text{これと } \textcircled{6} \text{ より } \frac{2 - s}{s} > s^2 \Leftrightarrow \frac{s^3 + s - 2}{s} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(s - 1)(s^2 + s + 2)}{s} < 0 \quad \text{となるので } 0 < s < 1$$

$$\text{したがって } 0 < 3X - \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < X < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{7} \text{ より 求める軌跡は } \left(x - \frac{1}{6}\right) \left(y + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$$