[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{3}$]

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ。

各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して $w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ とおく。

(1) (p, q) パターンのうち，$w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。

また，$w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2) s を p 以下の整数とする。(p, p) パターンで $w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ …①，$b \leqq c \leqq a$ …②,

$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ …③

(1) $w([a, b; c]) = -q \Leftrightarrow p - q - (a + b) = -q$ より $a + b = p$

ここで，$a \leqq p,\ b \leqq 0$ であるから a, b は $(a, b) = (p, 0)$ の 1 個。

②より $0 \leqq c \leqq p$ なので c は $p + 1$ 個。

よって，全部で $1 \times (p + 1) = p + 1$ 個。

また，$w([a, b; c]) = p \Leftrightarrow p - q - (a + b) = p$ より $a + b = -q$

ここで，$b \geqq -q,\ a \geqq 0$ であるから a, b は $(a, b) = (0, -q)$ の 1 個。

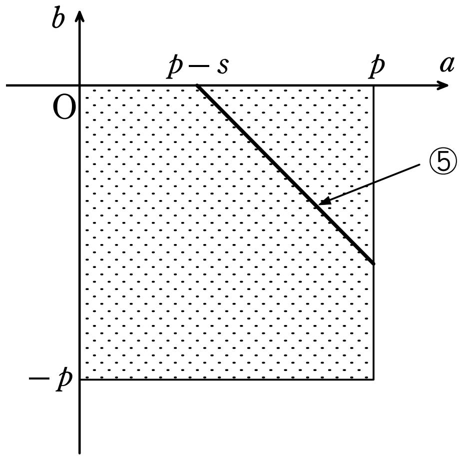
②より $-q \leqq c \leqq 0$ なので c は $q + 1$ 個。

(2) $p = q$ のとき，①より $-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ …④

③より $w([a, b; c]) = -(a + b)$

$w([a, b; c]) = -p + s \Leftrightarrow a + b = p - s$ …⑤

④より，(a, b) は図の打点部分にある。



(ⅰ) $s < 0$ のとき

0 個。

(ⅱ) $0 \leqq s \leqq p$ のとき

$(a,\ b)=(p-s+k,\ -k),\ 0\leqq k\leqq s$ であり，各 $(a,\ b)$ に対して

c は②より $a-b+1=p-s+2k+1$ 個ある。

よって，このとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{s}\left(p-s+2k+1\right)=\frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2}\cdot(s+1)$

$=(p+1)(s+1)$ 個。