[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{2}$]

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める。

（ⅰ） $a_1 = \langle a \rangle$

（ⅱ） $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

---

(1) $\sqrt{2}$ の整数部分は 1 だから $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle$ であり，$\sqrt{2} + 1$ の整数部分は 2 だから $a_2 = (\sqrt{2} + 1) - 2 = \sqrt{2} - 1$

$a_2 = a_1$ であるから，a_3 以降も a_1 と同じで $a_n = \sqrt{2} - 1$

(2) $a_1 = a$ であることが必要。a は小数部分であるから $a \geqq \dfrac{1}{3}$ と合わせて $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ …①

さらに，$a_2 = a$ であることが必要だが，このとき a_3 以降も a になり，十分である。

$a_2 = a$ より $a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a_1} \right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = a$

よって，$\dfrac{1}{a} - a$ は整数であるが，①より $1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ であるから

$\dfrac{1}{a} - a = 1$ …② または $\dfrac{1}{a} - a = 2$ …③

②より $a^2 + a - 1 = 0$ これと①より $a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

③より $a^2 + 2a - 1 = 0$ これと①より $a = -1 + \sqrt{2}$ よって $a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, -1 + \sqrt{2}$