［ 東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{1}$ ］

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が 3 つの条件 $f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$ を全て満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

$f(1)=a+b+c+d=1$ …①

$f(-1)=-a+b-c+d=-1$ …②

$\int_{-1}^{1}\left(bx^2+cx+d\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(bx^2+d\right)dx=\dfrac{2}{3}b+2d=1$ …③

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$ であり，

①＋②より $b+d=0 \Leftrightarrow d=-b$

よって $b=-\dfrac{3}{4},\ d=\dfrac{3}{4}$ …④

したがって，$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\dfrac{3}{2}\right)^2dx$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx$$

$$=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}$$

$$=\frac{27}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right\}$$

となり，I は $a=-\dfrac{1}{4}$ のときに最小値 $\dfrac{27}{2}\cdot\dfrac{3}{16}=\dfrac{81}{32}$ をとる。

このとき，①－②より $a+c=1$ であるから $c=\dfrac{5}{4}$

よって，$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$