［ 東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{1}$ ］

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が 3 つの条件 $f(1)=1$, $f(-1)=-1$, $\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$ を全て満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{2}$]

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2, 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

（ｉ） $a_1 = \langle a \rangle$

（ii） $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{3}$]

$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a, b; c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a, b; c]$ に対して $w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ とおく。

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。

また，$w([a, b; c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2) s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

[東京大学 2011 年前期 文科 $\boxed{4}$]

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$をとる。

放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta, \beta^2)$ を，3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X, Y)$ の軌跡を求めよ。