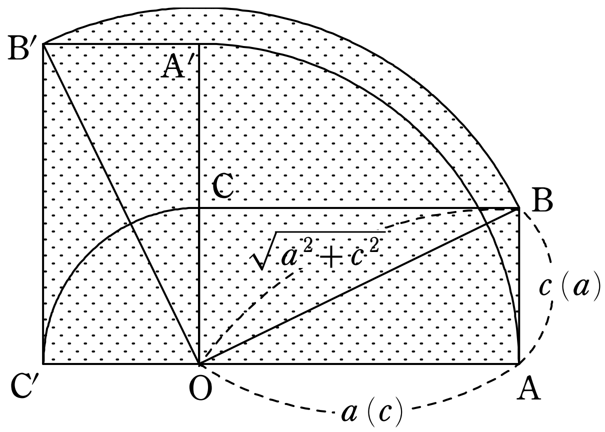
[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{1}$]

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体のつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) V は高さ b の柱で，底面は長方形 OABC を O のまわりに 90° 回転して得られる図の打点部分。



その面積は $\dfrac{\pi}{4}(a^2+c^2)+\dfrac{ac}{2}\cdot 2$ となる。

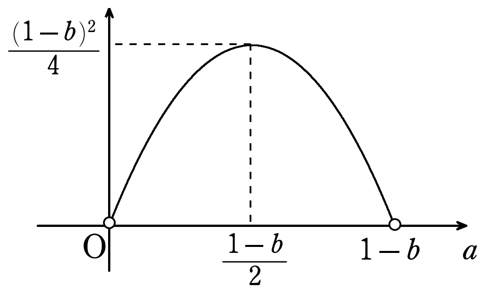
V の体積を W とすると $W=\left\{\dfrac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}b$

(2) $W=\left\{\dfrac{\pi}{4}\{(a+c)^2-2ac\}+ac\right\}b$

$=\left\{\dfrac{\pi}{4}(a+c)^2-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)ac\right\}b$ …①

$a+b+c=1$ より $a+c=1-b$ で，$0<b<1$ …②

よって $W=①=\left\{\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)ac\right\}b$ …③

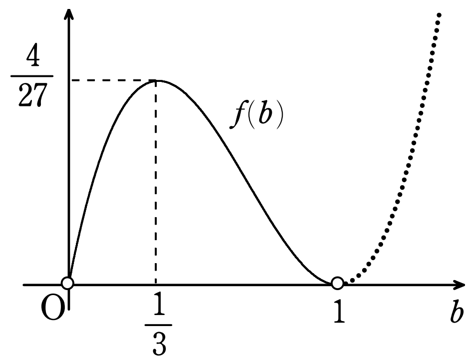


b を固定したとき，$ac=a(1-b-a)$ の範囲は

$0<ac\leqq\dfrac{1}{4}(1-b)^2$ であり，$\dfrac{\pi}{2}-1>0$ なので③の範囲は

$\left\{\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cdot\dfrac{1}{4}(1-b)^2\right\}b\leqq ③ <\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2 b$

したがって $\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\right)(1-b)^2 b\leqq W<\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2 b$ …④



次に b を変化させる。

$f(b)=(1-b)^2 b=(b-1)^2 b$ とおくと

$f'(b)=2(b-1)b+(b-1)^2$

$=(b-1)(3b-1)$

②より　$0 < f(b) \leqq \dfrac{4}{27}$　となり，

④よりWの範囲は　$0 < W < \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{4}{27}$　$\Leftrightarrow$　$0 < W < \dfrac{\pi}{27}$

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{2}$]

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。 $\dfrac{1}{2(k+1)} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

(1) $0 < x < 1$ のとき $k < k+x < k+1$ であるから

$$\int_0^1 \frac{1-x}{k+1}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k}dx$$ より $$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$$ …① を得る。

(2) $$\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx = \int_0^1 \left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx = \Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1 = (k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1$$

①より $$\frac{1}{2(k+1)} < (k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1 < \frac{1}{2k}$$

$$\frac{1}{2(k+1)^2} < \log(k+1)-\log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2} < \sum_{k=n}^{m-1}\left\{\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}\right\} < \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，(中辺) $= \log m - \log n - \left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\dfrac{1}{m}\right) = \log\dfrac{m}{n} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$

(右辺) $= \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) = \frac{m-n}{2mn}$

(左辺) $> \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)} = \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$

$= \dfrac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$

であるから，題意は示された。

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{3}$]

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。

x を 0 以上 30 以下の整数とする。

L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(♯)を繰り返す。

(♯) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，

裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，

$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

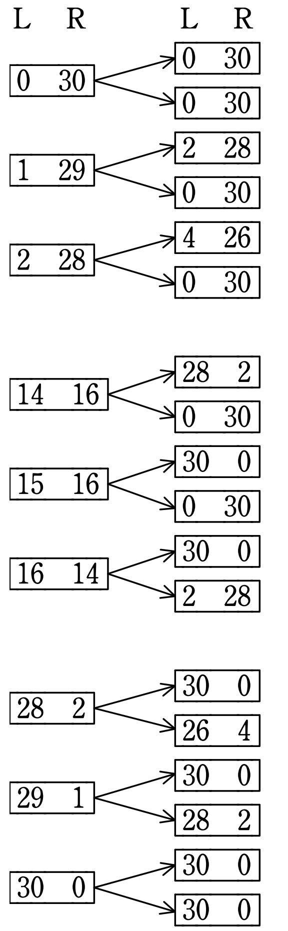
m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 個である確率を $P_m(x)$ とする。

たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3) n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。



(1) 操作 1 回でボールの個数は次の図のように変わる

（↗，↘ それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$）。

L が m 回後に 30 個になるのは，

（ⅰ）$x \leqq 15$ のとき

1 回目に表が出て $2x$ 個になり，残り $m-1$ 回で 30 個になる場合だから

$$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$$

（ⅱ）$x \geqq 15$ のとき

1 回目に表が出て 30 個になるか，

1 回目に表が出て $x-(30-x)=2x-30$ 個になり，

残り $m-1$ 回で 30 個になる場合で，

$$P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$$

（2）$P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)\right\}$$

よって　$P_{2n}(10)=\frac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{4}$　…①

①は　$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\frac{1}{3}\right\}$　と変形でき，$P_0(10)=0$　より

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\left\{P_0(10)-\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

（3）$P_{4n}(6)=\frac{1}{2}P_{4n-1}(12)$

$$=\frac{1}{4}P_{4n-2}(24)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{4n-3}(18)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{4n-4}(6)\right\}$$

よって　$P_{4n}(6)=\frac{1}{16}P_{4n-4}(6)+\frac{3}{16}$　…②

②は　$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\frac{1}{16}\left\{P_{4n-4}(6)-\frac{1}{5}\right\}$　と変形でき，$P_0(6)=0$　より

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{16}\right)^n\left\{P_0(6)-\frac{1}{5}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{16^n}\right)$$

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{4}$]

★────────────────────★

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$,

$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

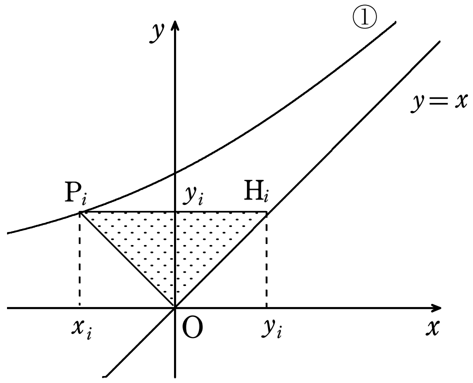
(1) $\mathrm{P}_i\ (i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ $\mathrm{H}_i\ (i=1,\ 2)$ とする。

このとき，$\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2) $x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{O}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{O}$ とで囲まれる図形の面積を y_1, y_2 を用いて表せ。

★────────────────────★

(1) $C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ …①



$\left|\dfrac{1}{2}x\right|<\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ より ①>0 である。

$①-x=\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}-\dfrac{1}{2}x>0$

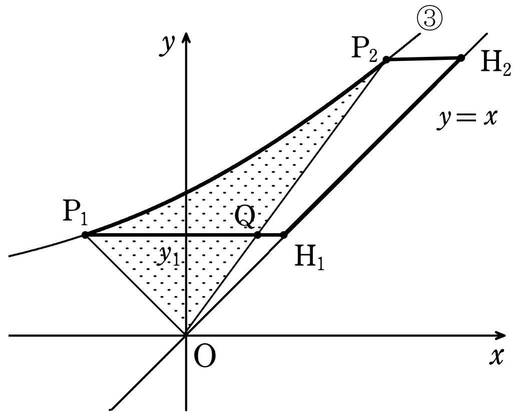
$\triangle\mathrm{OP}_i\mathrm{H}_i=\dfrac{1}{2}(y_i-x_i)y_i$ …②

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{4}x_i^{\,2}+2}-\frac{1}{2}x_i\right)\left(\frac{1}{2}x_i+\sqrt{\frac{1}{4}x_i^{\,2}+2}\right)$$

$=1$

よって $\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1=\triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2=1$

(2) ②$=1$ であるから，C 上の点について $\dfrac{1}{2}(y-x)y=1$



よって $x=y-\dfrac{2}{y}$ …③

したがって図のようになり，(1)より $\triangle\mathrm{OQP}_1$＝四角形 $\mathrm{P}_2\mathrm{QH}_1\mathrm{H}_2$ であるから

求める面積は図の太線で囲まれた部分の面積に等しく

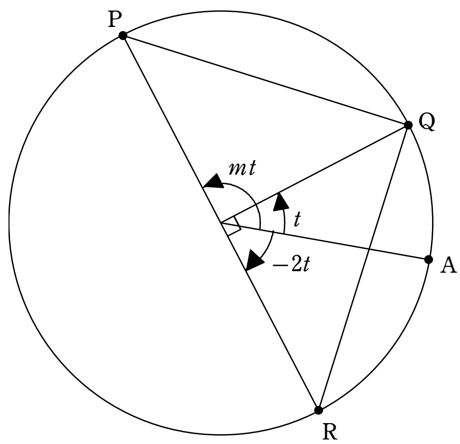
$$\int_{y_1}^{y_2}(y-③)\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}\,dy=2\log\frac{y_2}{y_1}$$

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{5}$]

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。

P, Q, R の速さはそれぞれ $m, 1, 2$ であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）

ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。



時刻 t までの回転角は，P：mt，Q：t，R：$-2t$ であるから

題意の直角二等辺三角形になるための条件は

$$mt-(-2t)=(2k+1)\pi \quad \cdots①, \qquad t-(-2t)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \cdots②$$

となる整数 k, n が存在することである。

②より $t=\dfrac{2n+1}{6}\pi$ $\cdots③$ $0 \leqq t \leqq 2\pi$ より $0 \leqq n \leqq 5$

①より $(m+2)t=(2k+1)\pi$ であるから，③を代入して $(m+2)\cdot\dfrac{2n+1}{6}\pi=(2k+1)\pi$

$$\Leftrightarrow \quad (m+2)(2n+1)=6(2k+1) \quad \cdots④$$

$2k+1$ は奇数であるから，④の右辺は 4 の倍数でない偶数。

さらに $2n+1$ が奇数であることから，$m+2$ は 4 の倍数でない偶数であり，

$1 \leqq m \leqq 10$ より $m=4, 8$

（ⅰ）$m=4$ のとき

④より $n=k$ となり，n は $0 \leqq n \leqq 5$ の整数。

（ⅱ）$m=8$ のとき

④より $5(2n+1)=3(2k+1)$ となり，$2n+1$ は 3 の倍数であるから $n=1, 4$

（$n=1$ のとき $k=2$，$n=4$ のとき $k=7$ で k は整数）

よって

$$(m, t)=\left(4, \frac{\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{2}\right), \left(4, \frac{5}{6}\pi\right), \left(4, \frac{7}{6}\pi\right), \left(4, \frac{3}{2}\pi\right), \left(4, \frac{11}{6}\pi\right), \left(8, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{3}{2}\pi\right)$$

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{6}$]

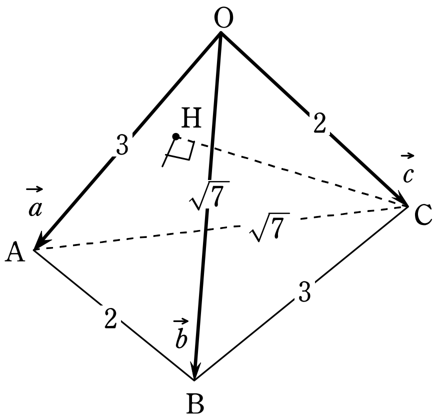
四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\sqrt{7},\ \mathrm{AB}=2$ であるとする。また，3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $0<t<1$ をみたす実数 t に対して，線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}_t,\ \mathrm{Q}_t$ とおく。2 点 $\mathrm{P}_t,\ \mathrm{Q}_t$ を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。

(1) $\mathrm{BC}=3,\ \mathrm{AC}=\sqrt{7},\ \mathrm{OC}=2$ となる。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=\sqrt{7},\ |\vec{c}|=2$

$\mathrm{AB}^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=4$ より $9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+7=4 \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=6$

$\mathrm{BC}^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2=9$ より $7-2\vec{b}\cdot\vec{c}+4=9 \iff \vec{b}\cdot\vec{c}=1$

$\mathrm{CA}^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=13-2\vec{a}\cdot\vec{c}=7 \iff \vec{a}\cdot\vec{c}=3$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=0$ より

$\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=0$，$\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$ から $9s+6t=3,\ 6s+7t=1$

よって $s=\dfrac{5}{9},\ t=-\dfrac{1}{3}$ を得る。

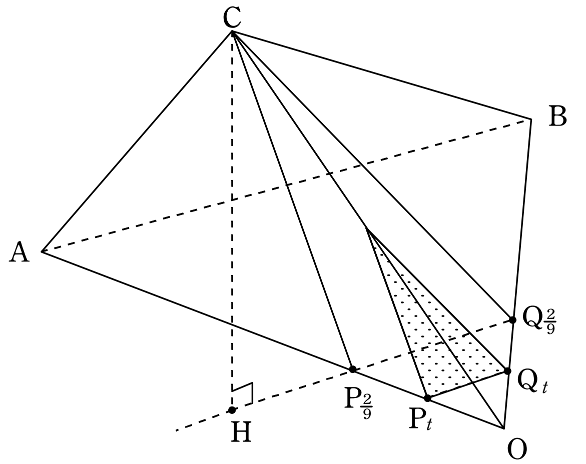
したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ …①

(2) 直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$上の点Xは $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\ \alpha+\beta=t$ と表される。

①において $\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ であるから，$t=\dfrac{2}{9}$ のときHは直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$上にあり，

M はCとHを通る。

（i）$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき



切り口は $\triangle\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}$ と相似な三角形で，

相似比は $t:\dfrac{2}{9}$ であるから

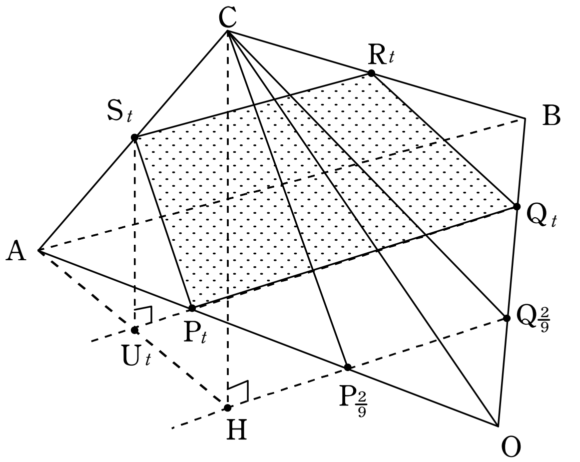
$$S(t)=\left(\frac{t}{\frac{2}{9}}\right)^2 S\left(\frac{2}{9}\right)$$

(1) より $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\dfrac{5}{9}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\dfrac{5^2}{9^2}\cdot 9+\dfrac{1}{3^2}\cdot 7+4-2\cdot\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 6+2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1-2\cdot\dfrac{5}{9}\cdot 3=\dfrac{8}{3}$

よって $\mathrm{CH}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ で，$\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}=\dfrac{2}{9}\mathrm{AB}=\dfrac{4}{9}$ であるから

$$S(t)=\left(\frac{t}{\frac{2}{9}}\right)^2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{6}t^2\quad\cdots②$$

（ii）$\dfrac{2}{9}\leqq t<1$ のとき



切り口は図の台形$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t\mathrm{S}_t$で，

$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t=t\mathrm{AB}=2t$

$\mathrm{S}_t\mathrm{R}_t:\mathrm{AB}=\mathrm{CS}_t:\mathrm{CA}$

$=\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{P}_t:\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{A}$

$=\left(t-\dfrac{2}{9}\right):\dfrac{7}{9}$

$=(9t-2):7$ より

$\mathrm{S}_t\mathrm{R}_t=\dfrac{9t-2}{7}\cdot 2$ となる。

高さを h とすると

$$h:\mathrm{CH}=\mathrm{AU}_t:\mathrm{AH}=\mathrm{AP}_t:\mathrm{AP}_{\frac{2}{9}}=(1-t):\frac{7}{9}$$ であるから

$$h=\frac{9}{7}(1-t)\mathrm{CH}=\frac{9}{7}(1-t)\mathrm{CH}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)$$

よって $S(t)=\dfrac{1}{2}\left(2t+\dfrac{9t-2}{7}\cdot 2\right)\cdot\dfrac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)=\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t)$ …③

(3) ②は単調増加であるから③を考えればよく，

$t=\dfrac{9}{16}$ のとき最大値 $\dfrac{12\sqrt{6}}{49}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{7}{16}=\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$