[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{6}$]

四面体 OABC において, 4 つの面はすべて合同であり, $\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\sqrt{7},\ \mathrm{AB}=2$ であるとする。また, 3 点 $\mathrm{O},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}$ を含む平面を L とする。

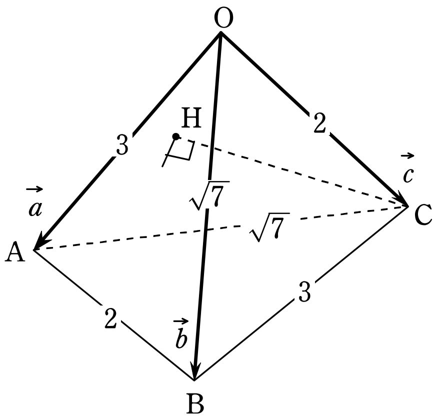
(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $0<t<1$ をみたす実数 t に対して, 線分 $\mathrm{OA},\ \mathrm{OB}$ 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}_t,\ \mathrm{Q}_t$ とおく。2 点 $\mathrm{P}_t,\ \mathrm{Q}_t$ を通り, 平面 L に垂直な平面を M とするとき, 平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最大値を求めよ。

---

(1) $\mathrm{BC}=3,\ \mathrm{AC}=\sqrt{7},\ \mathrm{OC}=2$ となる。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=\sqrt{7},\ |\vec{c}|=2$

$\mathrm{AB}^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=4$ より $9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+7=4 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=6$

$\mathrm{BC}^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2=9$ より $7-2\vec{b}\cdot\vec{c}+4=9 \Leftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{c}=1$

$\mathrm{CA}^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=13-2\vec{a}\cdot\vec{c}=7 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{c}=3$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=0$ より

$\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=0$, $\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$ から $9s+6t=3,\ 6s+7t=1$

よって $s=\dfrac{5}{9},\ t=-\dfrac{1}{3}$ を得る。

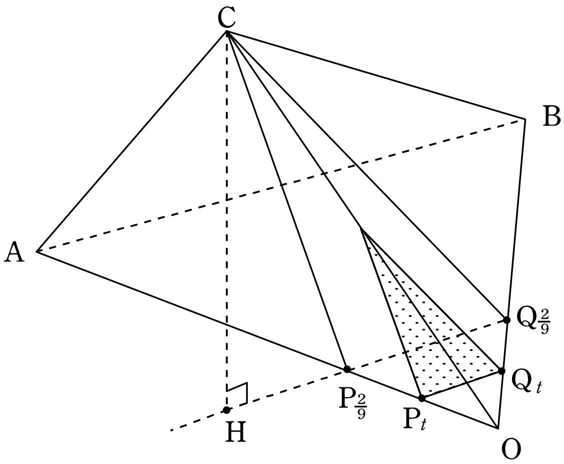
したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ …①

(2) 直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$上の点Xは $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\ \alpha+\beta=t$ と表される。

①において $\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ であるから，$t=\dfrac{2}{9}$ のときHは直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$上にあり，

MはCとHを通る。

（i）$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき



切り口は $\triangle\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}$ と相似な三角形で，

相似比は $t:\dfrac{2}{9}$ であるから

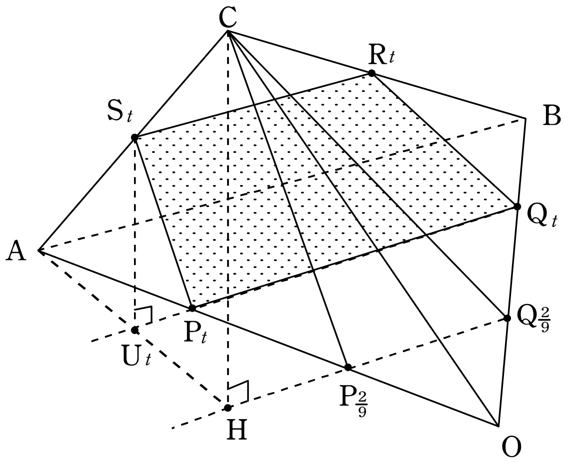
$$S(t)=\left(\frac{t}{\frac{2}{9}}\right)^2 S\left(\frac{2}{9}\right)$$

(1)より $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\dfrac{5}{9}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\dfrac{5^2}{9^2}\cdot9+\dfrac{1}{3^2}\cdot7+4-2\cdot\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot6+2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot1-2\cdot\dfrac{5}{9}\cdot3=\dfrac{8}{3}$

よって $\mathrm{CH}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ で，$\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}=\dfrac{2}{9}\mathrm{AB}=\dfrac{4}{9}$ であるから

$$S(t)=\left(\frac{t}{\frac{2}{9}}\right)^2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{6}t^2 \quad \cdots②$$

（ii）$\dfrac{2}{9}\leqq t<1$ のとき



切り口は図の台形$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t\mathrm{S}_t$で，

$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t=t\mathrm{AB}=2t$

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_t\mathrm{R}_t:\mathrm{AB}&=\mathrm{CS}_t:\mathrm{CA}\\&=\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{P}_t:\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{A}\\&=\left(t-\frac{2}{9}\right):\frac{7}{9}\\&=(9t-2):7\end{aligned}$$ より

$\mathrm{S}_t\mathrm{R}_t=\dfrac{9t-2}{7}\cdot2$ となる。

高さをhとすると

$$h:\mathrm{CH}=\mathrm{AU}_t:\mathrm{AH}=\mathrm{AP}_t:\mathrm{AP}_{\frac{2}{9}}=(1-t):\frac{7}{9}$$ であるから

$$h=\frac{9}{7}(1-t)\mathrm{CH}=\frac{9}{7}(1-t)\mathrm{CH}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)$$

よって $S(t)=\dfrac{1}{2}\left(2t+\dfrac{9t-2}{7}\cdot 2\right)\cdot\dfrac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)=\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t)$ …③

(3) ②は単調増加であるから③を考えればよく，

$t=\dfrac{9}{16}$ のとき最大値 $\dfrac{12\sqrt{6}}{49}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{7}{16}=\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$