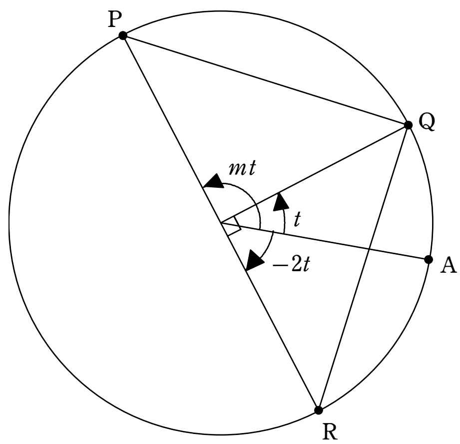
[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{5}$]

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。

P, Q, R の速さはそれぞれ $m, 1, 2$ であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）

ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。



時刻 t までの回転角は，P：mt，Q：t，R：$-2t$ であるから

題意の直角二等辺三角形になるための条件は

$$mt-(-2t)=(2k+1)\pi \quad \cdots①, \qquad t-(-2t)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \cdots②$$

となる整数 k, n が存在することである。

②より $t=\dfrac{2n+1}{6}\pi$ $\cdots$③　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ より $0 \leqq n \leqq 5$

①より $(m+2)t=(2k+1)\pi$ であるから，③を代入して $(m+2)\cdot\dfrac{2n+1}{6}\pi=(2k+1)\pi$

$$\Leftrightarrow \quad (m+2)(2n+1)=6(2k+1) \quad \cdots④$$

$2k+1$ は奇数であるから，④の右辺は 4 の倍数でない偶数。

さらに $2n+1$ が奇数であることから，$m+2$ は 4 の倍数でない偶数であり，

$1 \leqq m \leqq 10$ より $m=4, 8$

（ｉ）$m=4$ のとき

④より $n=k$ となり，n は $0 \leqq n \leqq 5$ の整数。

（ii）$m=8$ のとき

④より $5(2n+1)=3(2k+1)$ となり，$2n+1$ は 3 の倍数であるから $n=1, 4$

（$n=1$ のとき $k=2$，$n=4$ のとき $k=7$ で k は整数）

よって

$$(m,\ t)=\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right), \left(4,\ \frac{\pi}{2}\right), \left(4,\ \frac{5}{6}\pi\right), \left(4,\ \frac{7}{6}\pi\right), \left(4,\ \frac{3}{2}\pi\right), \left(4,\ \frac{11}{6}\pi\right), \left(8,\ \frac{\pi}{2}\right), \left(8,\ \frac{3}{2}\pi\right)$$