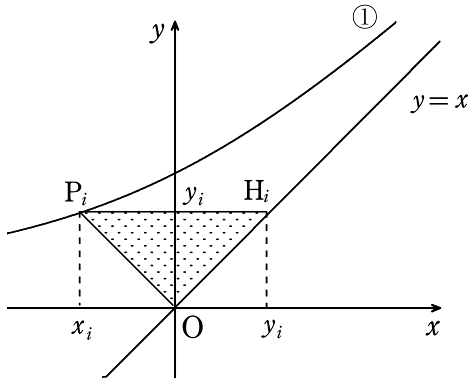
[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{4}$]

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1) P_i $(i=1, 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1, 2)$ とする。このとき，$\triangle \mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle \mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ。

(2) $x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と線分 $\mathrm{P_1O}$, $\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を y_1, y_2 を用いて表せ。



(1) $C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ …①

$\left|\dfrac{1}{2}x\right|<\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ より ①>0 である。

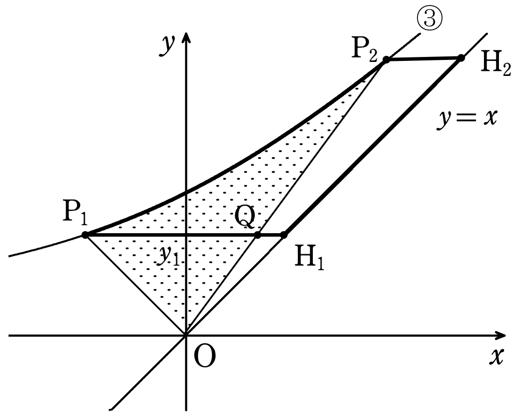
①$-x=\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}-\dfrac{1}{2}x>0$

$\triangle \mathrm{OP}_i\mathrm{H}_i=\dfrac{1}{2}(y_i-x_i)y_i$ …②

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{4}x_i^2+2}-\dfrac{1}{2}x_i\right)\left(\dfrac{1}{2}x_i+\sqrt{\dfrac{1}{4}x_i^2+2}\right)$

$=1$

よって $\triangle \mathrm{OP_1H_1}=\triangle \mathrm{OP_2H_2}=1$



(2) ②$=1$ であるから，C 上の点について $\dfrac{1}{2}(y-x)y=1$

よって $x=y-\dfrac{2}{y}$ …③

したがって図のようになり，(1)より $\triangle \mathrm{OQP_1}=$ 四角形 $\mathrm{P_2QH_1H_2}$ であるから

求める面積は図の太線で囲まれた部分の面積に等しく

$$\int_{y_1}^{y_2}(y-③)\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}\,dy=2\log\frac{y_2}{y_1}$$