[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{3}$]

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。

x を 0 以上 30 以下の整数とする。

L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(♯) を繰り返す。

(♯) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，

裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，

$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

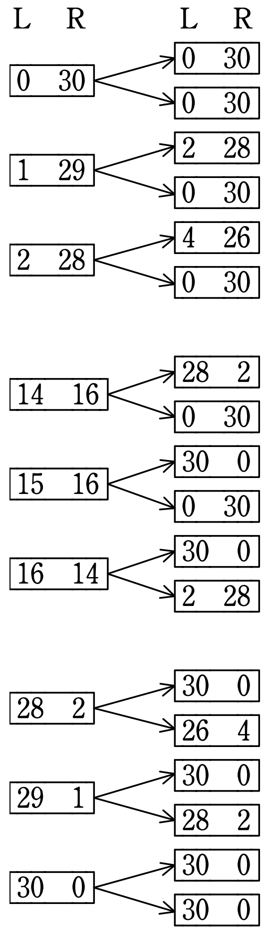
m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 個である確率を $P_m(x)$ とする。

たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

（1）$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

（2）n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

（3）n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。



（1）操作 1 回でボールの個数は次の図のように変わる

（↗，↘ それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$）。

L が m 回後に 30 個になるのは，

（ⅰ）$x \leqq 15$ のとき

1 回目に表が出て $2x$ 個になり，残り $m-1$ 回で 30 個になる場合だから

$$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$$

（ⅱ）$x \geqq 15$ のとき

1 回目に表が出て 30 個になるか，

1 回目に表が出て $x-(30-x)=2x-30$ 個になり，

残り $m-1$ 回で 30 個になる場合で，

$$P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$$

（2）$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{2}P_{2n-1}(20)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)\right\}$$

よって　$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\dfrac{1}{4}$　…①

①は　$P_{2n}(10)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\dfrac{1}{3}\right\}$　と変形でき，　$P_0(10)=0$　より

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\left\{P_0(10)-\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

（3）$P_{4n}(6)=\dfrac{1}{2}P_{4n-1}(12)$

$$=\frac{1}{4}P_{4n-2}(24)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{4n-3}(18)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{4n-4}(6)\right\}$$

よって　$P_{4n}(6)=\dfrac{1}{16}P_{4n-4}(6)+\dfrac{3}{16}$　…②

②は　$P_{4n}(6)-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{16}\left\{P_{4n-4}(6)-\dfrac{1}{5}\right\}$　と変形でき，　$P_0(6)=0$　より

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{16}\right)^n\left\{P_0(6)-\frac{1}{5}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{16^n}\right)$$