[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{2}$]

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。 $\dfrac{1}{2(k+1)}<\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

(1) $0<x<1$ のとき $k<k+x<k+1$ であるから

$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+1}dx<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\int_0^1\frac{1-x}{k}dx$ より $\displaystyle\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$ …① を得る。

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1$

①より $\displaystyle\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1<\frac{1}{2k}$

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)^2}<\sum_{k=n}^{m-1}\left\{\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}\right\}<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，(中辺) $\displaystyle=\log m-\log n-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{m}\right)=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$

(右辺) $\displaystyle=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$

(左辺) $\displaystyle>\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$

$\displaystyle=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$

であるから，題意は示された。