[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{1}$]

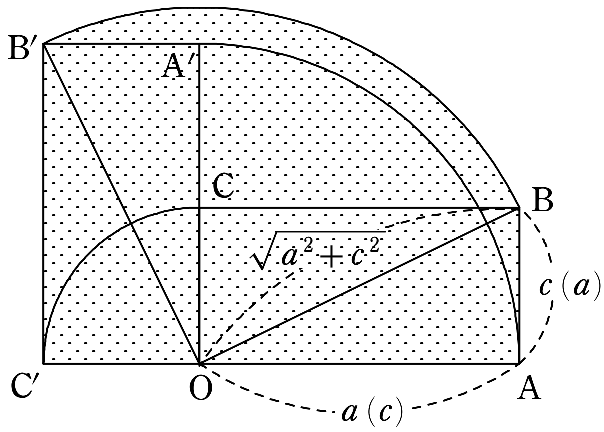
3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体のつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

---

(1) V は高さ b の柱で，底面は長方形 OABC を O のまわりに 90° 回転して得られる図の打点部分。



その面積は $\dfrac{\pi}{4}(a^2+c^2)+\dfrac{ac}{2}\cdot 2$ となる。

V の体積を W とすると $W=\left\{\dfrac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}b$

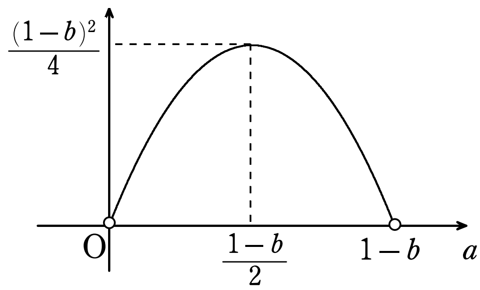
(2) $W=\left\{\dfrac{\pi}{4}\{(a+c)^2-2ac\}+ac\right\}b$

$=\left\{\dfrac{\pi}{4}(a+c)^2-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)ac\right\}b$ …①

$a+b+c=1$ より $a+c=1-b$ で，$0<b<1$ …②

よって $W=①=\left\{\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)ac\right\}b$ …③

b を固定したとき，$ac=a(1-b-a)$ の範囲は



$0<ac\leqq\dfrac{1}{4}(1-b)^2$ であり，$\dfrac{\pi}{2}-1>0$ なので③の範囲は

$\left\{\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cdot\dfrac{1}{4}(1-b)^2\right\}b\leqq ③ <\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2 b$

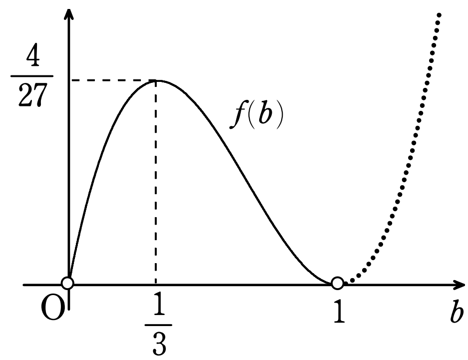
したがって $\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\right)(1-b)^2 b\leqq W<\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2 b$ …④

次に b を変化させる。

$f(b)=(1-b)^2 b=(b-1)^2 b$ とおくと

$f'(b)=2(b-1)b+(b-1)^2$

$=(b-1)(3b-1)$



②より $0 < f(b) \leqq \dfrac{4}{27}$ となり，

④より W の範囲は $0 < W < \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{4}{27} \Leftrightarrow 0 < W < \dfrac{\pi}{27}$